

TIPOGRAFIA DELLA S. C. DE PROPAGANDA FIDE

# ANNALI

# DI MATEMATICA

## PURA ED APPLICATA

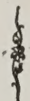
PUBBLICATI DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime all' Università di Roma

E Compilati da

E. BETTI *a Pisa*
F. BRIOSCHI *a Pavia*



A. GENOCCHI *a Torino*
B. TORTOLINI *a Roma*

( In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche )

TOMO II. ANNO 1859.

ROMA

PRESSO FRANCESCO BLEGGI LIBRAJO

( Via del Piè di Marmo N°. 38. )

1859.

# ANNALI
# DI MATEMATICA
## PURA ED APPLICATA

## IL DETERMINANTE DI SYLVESTER ED IL RISULTANTE DI EULERO.
## NOTA

**DEL PROF. OTTO HESSE.**

È noto che il risultante di Eulero di due equazioni algebriche ad una incognita è eguale al determinante Bezout-Sylvester. Questa nota non è tanto dedicata a dare una nuova dimostrazione di questo fatto, quanto a mostrare come l' una espressione può essere ridotta all'altra col soccorso di noti teoremi dei determinanti.

Se :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = 0 \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = 0 \end{cases}$$

sono due equazioni che sussistono contemporaneamente per qualsivoglia valore dell' incognita $x$ si hanno con esse le seguenti :

$$(2)\quad \begin{cases} f(x) = 0\,, \quad xf(x) = 0\,, \ \dots\ x^{n-1}f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0\,, \quad x\varphi(x) = 0\,, \ \dots\ x^{m-1}\varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Se in queste equazioni si considerano le varie potenze dell'incognita come altrettante nuove incognite, si hanno equazioni lineari il cui numero supera di una unità quello delle incognite. Il risultato dell'eliminazione delle nuove incognite sarà una equazione:

$$(3)\qquad S = 0$$

fra i coefficienti delle (1), la quale sussisterà colle (1) medesime.

Il primo membro di questa equazione (determinante di Sylvester) è quindi composto dei coefficienti delle potenze 0, 1, 2, . . . . dell'incognita $x$ nelle $m+n$ equazioni (2). Il determinante dell'ordine $m+n$ :

$$(4) \qquad S = \sum \pm\, a_0^0\, a_1^1\, a_{m+n-1}^{m+n-1}$$

diventa il primo membro della (3) qualora si stabilisca che:

$$(5) \qquad a_s^r = a_{s-r} \qquad \text{per} \qquad r = 0, 1, \ldots (n-1)$$

$$(6) \qquad a_s^r = b_{n+s-r} \qquad \text{per} \qquad r = n, (n+1), \ldots (n+m-1)$$

e che si annullino tutti quegli elementi $a_s^r$ i quali per le (5) (6) non assumono gli indici dei coefficienti delle equazioni (1).

Porrò ora in relazione il determinante così rappresentato col determinante usato molte volte da Borchardt:

$$B = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

collo stabilire che $s_k$ esprima la somma delle potenze $k^{esime}$ delle $n$ radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$. Anche questo determinante lo considero come un determinante dell' ordine $m+n$:

$$(7) \qquad B = \sum \pm\, b_0^0\, b_1^1 \ldots\ldots b_{m+n-1}^{m+n-1}$$

supponendo:

$$(8) \qquad b_{r'}^{r'} = s_{s'+r'} \qquad \text{per} \qquad r' = 0, 1, \ldots (n-1)$$

$$(9) \qquad b_{s'}^{r'} = 0\,, \quad b_{s'}^{r'} = 1 \qquad \text{per} \quad r' = n, (n+1), \ldots (n+m-1)$$

Se ora si pone:

$$(10) \qquad c_{r'}^r = a_0^r\, b_0^{r'} + a_1^r\, b_1^{r'} + \ldots + a_{m+n-1}^r\, b_{m+n-1}^{r'}$$

il determinante:

$$(11) \qquad C = \sum \pm\, c_0^0\, c_1^1 \ldots c_{m+n-1}^{m+n-1}$$

diventa, come è noto, eguale al prodotto dei due precedenti, in modo che si ha:

$$(12) \qquad C = SB.$$

Rappresentiamo ora effettivamente gli elementi di questo nuovo determinante. Consi-

deriamo dapprima gli elementi $c_{r'}^{r}$ nei quali $r$, $r'$ hanno i valori $0, 1, \ldots . n-1$. Per questi valori, rammentando le (5), (8), la (10) si presenta sotto la forma:

$$c_{r'}^{r} = a_{-r}\, s_{r'} + a_{1-r}\, s_{1+r'} + \ldots . + a_{m+n-1-r}\, s_{m+n-1+r'}$$

ossia:

$$c_{r'}^{r} = a_0\, s_{r+r'} + a_1\, s_{r+r'+1} + \ldots . + a_m\, s_{r+r'+m}$$

la quale espressione si può rappresentare più brevemente nel modo seguente:

$$(13) \qquad c_{r'}^{r} = \sum x^{r+r'} f(x)$$

il segno sommatorio riferendosi alle radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$.

Rappresentiamo in secondo luogo gli elementi $c_{r'}^{r}$ del determinante C pel caso che $r'$ sia eguale a $0, 1, \ldots . n-1$ ed $r = n, n+1 \ldots . n+m-1$. In questo caso sussistono le equazioni (6) (8) e quindi si ha:

$$c_{r'}^{r} = b_{n-r}\, s_{r'} + b_{n+1-r}\, s_{1+r'} + \ldots . + b_{2n+m-1-r}\, s_{m+n-1+r'}$$

e siccome tutte le $b$ con indici negativi sono nulle, come tutte le $b$ il cui indice è più grande di $n$, si otterrà:

$$c_{r'}^{r} = b_0\, s_{r'+r-n} + b_1\, s_{r'+r-n+1} + \ldots . + b_n\, s_{r'+r};$$

la quale espressione può rappresentarsi nel modo seguente:

$$c_{r'}^{r} = \sum x^{r'+r-n}\, \varphi(x);$$

ed è evidentemente eguale a zero.

Dunque si annullano tutti gli elementi $c_{r'}^{r}$ del determinante C nei quali $r'$ sia eguale a $0, 1 \ldots . (n-1)$ ed $r = n, n+1 \ldots . n+m-1$. Il determinante C si decompone quindi nel prodotto di due determinanti:

$$(14) \qquad C = \sum \pm c_0^0\, c_1^1 \ldots . c_{n-1}^{n-1} . \sum \pm c_n^n\, c_{n+1}^{n+1} \ldots . c_{n+m-1}^{n+m-1} .$$

Rimangono in terzo luogo a considerarsi gli elementi $c_{r'}^{r}$ pel caso in cui tanto $r$ che $r'$ abbiano i valori $n, n+1 \ldots n+m-1$. Per le (9) si annullano nell'espressione (10) tutte le $b$ ad eccezione della sola $b_{r'}^{r}$ la quale è eguale ad uno, si ha quindi

$$c_{r'}^{r} = a_{r'}^{r}$$

o per la (6);

$$c^r_{r'} = b_{n+r'-r}$$

Sarà quindi $c^r_{r'}$ eguale a zero ogni qualvolta $r' > r$. Perciò nel determinante

$$\sum \pm c^n_n \, c^{n+1}_{n+1} \ldots . c^{n+1-1}_{n+m-1}$$

scompajono tutti gli elementi da una banda della diagonale, ed il determinante stesso diviene, per un noto teorema, il prodotto di tutti gli elementi della diagonale, ognuno dei quali è eguale a $b_n$. Il valore del detto determinante è quindi $b^m_n$. Se si pone questo valore nella (14) si ha:

$$(15) \qquad C = b^m_n \sum \pm c^0_0 \, c^1_1 \ldots . c^{n-1}_{n-1}$$

ossia per le (12) (13):

$$(16) \qquad S.B = b^m_n \begin{vmatrix} \sum f(x), & \sum x f(x) \ldots & \sum x^{n-1} f(x) \\ \sum x f(x), & \sum x^2 f(x) \ldots & \sum x^n f(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum x^{n-1} f(x), & \sum x^n f(x) \ldots & \sum x^{2n-2} f(x) \end{vmatrix}$$

Ora se con $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ si indicano le radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$, il determinante del secondo membro di quest'ultima equazione è eguale al prodotto dei due determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \ldots . . f(x_n) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & \ldots . x_n f(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} f(x_1) & x_2^{n-1} f(x_2) & \ldots . x_n^{n-1} f(x_n) \end{vmatrix}$$

e siccome indicando con $\beta$ il primo di essi, il secondo è evidentemente eguale a

$$\beta . f(x_1) \, f(x_2) \ldots f(x_n)$$

la (16) darà:

$$SB = b^m_n \, \beta^2 f(x_1) \, f(x_2) \ldots f(x_n)$$

ossia per essere $\beta^2 = B$:

$$S = b^m_n f(x_1) \, f(x_2) \ldots f(x_n).$$

Dunque il determinante di Sylvester è eguale al risultante di Eulero qualora i coefficienti delle più alte potenze della incognita nelle due equazioni sieno eguali all'unità.

Heidelberg. 12. Ottobre 1858.

## COMPOSIZIONE DI UNA FUNZIONE BIQUADRATICA, ED A QUATTRO INDETERMINATE, LA QUALE MOLTIPLICATA PER UN'ALTRA FUNZIONE SOMIGLIANTE, PRODUCA UNA NUOVA FUNZIONE EGUALMENTE SOMIGLIANTE.

### NOTA

**DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.**

1.° Per quanto io sappia *Lagrange* si è più di tutti occupato nella formazione di quelle funzioni, che possono dirsi *somiglianti*, quali cioè moltiplicate fra di loro producono un'altra funzione della medesima forma: si può consultare su quest' oggetto l'addizione fatta dallo stesso *Lagrange* all'algebra di *Eulero* vol. 2.° pag. 469 e seg. Paris 1810; in appresso anche *Legendre* nel secondo vol. della *Théorie des nombres* 3.ª Edit. 1830 si occupa dello stesso argomento pag. 134 riportando quasi per intero l' analisi di *Lagrange:* ambedue i geometri hanno estese le loro ricerche fino alle funzioni cubiche ternarie, e la sola lunghezza dei calcoli è ciò che li ha disimpegnati dal progredire più oltre. A dir il vero il problema considerato anche in tutta la sua generalità per $n$ indeterminate, e dell'ordine $n^{esimo}$ si riduce all' eliminazione di un'incognita fra due equazioni o dello stesso grado, o di grado differente, e tutta la difficoltà consiste nella scelta più o meno agevole dei differenti metodi di eliminazione. Quando nell'eliminazione si voglia far uso delle funzioni simmetriche, generalmente l'operazione riesce assai lunga, a meno che un qualche artificio particolare la renda più breve: *Lagrange,* e *Legendre* hanno fatto sempre uso delle funzioni simmetriche tanto per le funzioni quadratiche binarie, quanto per le cubiche ternarie: anche io in questa breve nota mi prefiggo di calcolare la funzione biquadratica quaternaria per mezzo delle funzioni simmetriche, le quali però saranno tutte d'indice semplice, ed apparterranno a tre particolari equazioni, due delle quali sono di quarto grado, ed una di terzo.

2.° Richiamo di volo, che se $\alpha$, $\beta$ siano le radici dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

il prodotto

$$(r + q\alpha)(r + q\beta)$$

sarà una funzione quadratica binaria, vale a dire

$$\mathrm{F} = a^2r^2 - abrq + cq^2a.$$

Essa verrebbe a coincidere con la risultante delle due equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad px^2 + qx + r = 0$$

per la supposizione di $p = 0$; potrebbe anche dirsi che trasformando l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

per mezzo della sostituzione

$$y = r + qx$$

l'ultimo termine della trasformata in $y$, sarà la funzione F: il che si riduce evidentemente alla trasformata di *Tischirnaüs*; la funzione F binaria quadratica appartiene alle funzioni *somiglianti,* vale a dire, che moltiplicata per la nuova funzione

$$a^2 r_1^2 - abr_1 q_1 + cq_1^2 a$$

produce una funzione della stessa forma; come può vedersi nei citati scritti di *Lagrange* e *Legendre.*

3º Venendo alle funzioni cubiche; si conosce la risultante di due equazioni di terzo grado: se l'equazioni fossero

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ , \qquad px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

la funzione cubica ternaria somigliante sarebbe il valore della risultante per $p=0$, e le indeterminate con le quali si comporrebbe la detta funzione sarebbero, $q, r, s$. Il Sig. *F. Faà Di Bruno* ha riportato per esteso l' espressione di questa risultante nel tom. 6º de'miei *Annali* pag. 416. an. 1855, per cui fatto ivi $p = 0$ si desume l'espressione della forma cubica ternaria rispetto alle indeterminate $q$, $r$, $s$. Facendo perciò uso delle funzioni simmetriche, come fecero *Lagrange* e *Legendre,* sarebbe lo stesso che calcolare il prodotto dei tre trinomi

$$s + r\alpha + q\alpha^2\ , \qquad s + r\beta + q\beta^2\ , \qquad s + r\gamma + q\gamma^2$$

ove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sieno le radici dell'equazione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Volendo poi sempre riportare questo problema alla trasformata di *Tischirnaüs*, sarebbe lo stesso dire, che data l'equazione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ed adoprata la sostituzione

$$y = s + qx + rx^2$$

l'ultimo termine della nuova equazione in $y$ di terzo grado rappresenterà la nominata funzione cubica ternaria.

4º Venendo adunque alle funzioni biquadratiche, è stata calcolata, ed è cognita la risultante di due equazioni complete del quarto grado: lo stesso Sig. Cav. *F. Faà Di Bruno* ha riportato nel citato luogo de'miei *Annali* per esteso tutti i termini di

questa risultante, la quale è una funzione dei dieci coefficienti delle due equazioni

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \,, \qquad px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

Se ivi pongasi $p = 0$, la somma dei termini che restano, rappresenta la funzione biquadratica delle quattro indeterminate $q$, $r$, $s$, $t$. Qui pure il metodo è generale, cioè che se per l'equazione del quarto grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

pongasi la sostituzione di *Tischirnaüs*,

$$y = t + sx + rx^2 + qx^3$$

l'ultimo termine della nuova equazione di quarto grado in $y$, somministrerà la funzione *biquadratica* rispetto alle quattro indeterminate $t, s, r, q$ : questa funzione moltiplicata per altra della stessa forma produce una funzione somigliante : non volendosi discostare dalle funzioni simmetriche, la funzione omogenea in proposito è il prodotto dei quattro quatrinomi

$$t + s\alpha + r\alpha^2 + q\alpha^3 \,, \qquad t + s\beta + r\beta^2 + q\beta^3$$

$$t + s\gamma + r\gamma^2 + q\gamma^2 \,, \qquad t + s\delta + r\delta^2 + q\delta^3$$

ove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ siano le radici dell'equazione

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Ora questo è quello che io mi propongo di sviluppare in questa nota, non intendendo già di riportare questo risultato qual cosa nuova, ma solamente di porre in vista, come i coefficienti delle potenze omogenee delle quattro indeterminate possano essere rappresentate da funzioni simmetriche di solo indice semplice riferite a tre particolari equazioni, una di terzo, e due di quarto grado.

5.° Per uniformarci alle notazioni di già iu uso siano $x$, $y$, $z$, $u$ le quattro indeterminate, e sia

$$\rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0$$

l'equazione del quarto grado della quale le radici siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, e proponiamoci di formare il prodotto dei quattro quatrinomi

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 u \,, \qquad x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 u \,,$$

$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 u \,, \qquad x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 u$$

Come è chiaro i coefficienti delle diverse potenze omogenee delle quattro indeterminate $x$, $y$, $z$, $u$ saranno altrettante funzioni simmetriche d'indice semplice, e composto delle radici $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, e quindi esprimibili per mezzo dei coefficienti A, B, C, D dell'equazione proposta : la funzione di cui si tratta sarà dunque della forma

*

$$x^4 + Hx^3 + Lx^2 + Mx + N$$

e tutto si ridurrà alla composizione dei coefficienti H, L, M, N, de'quali la più laboriosa è quella per M, N: intanto per l'omogeneità della funzione osserviamo, che H, L, M, N saranno respettivamente altrettante funzioni omogenee di primo, di secondo, di terzo, di quarto grado delle altre tre indeterminate $y$, $z$, $u$. Ciò posto siano $S_1$, $S_2$, ... $S_r$ le funzioni simmetriche d'indice semplice per l'equazione di quarto grado in $\rho$ in modo, che per le sue radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si abbia identicamente

$$S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \delta^r$$

d'onde per il valore del coefficiente H, si ha

$$H = S_1 y + S_2 z + S_3 u$$

ed i valori di $S_1$, $S_2$, $S_3$ sarebbero

$$S_1 = -A, \qquad S_2 = A_2 - 2B, \qquad S_3 = 3AB - A^3 - 3C.$$

Per venire gradatamente alla determinazione degli altri coefficienti premettiamo quanto segue: Dalla risoluzione algebrica dell'equazioni del quarto grado è noto, che ponendo per le quattro radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$u' = \alpha\gamma + \beta\delta, \qquad u'' = \alpha\beta + \gamma\delta, \qquad u''' = \alpha\delta + \beta\gamma$$

in allora $u'$, $u''$, $u'''$ saranno le radici dell'equazione ridotta

$$X^3 - BX^2 + (AC - 4D)X + (4B - A^2)D - C^2 = 0.$$

Come pure con le stesse radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, componiamo una nuova equazione di quarto grado, della quale le radici siano

$$x_1 = \alpha\beta\gamma, \qquad x_2 = \alpha\beta\delta, \qquad x_3 = \alpha\gamma\delta, \qquad x_4 = \beta\gamma\delta$$

è facile il dedurre, che l'equazione cercata sarà

$$Y^4 + CY^3 + BDY^2 + AD^2Y + D^3 = 0.$$

Siano ora $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ... $Q_r$ le funzioni simmetriche d'indice semplice della ridotta di terzo grado in X, il coefficiente L della $x^2$, sarà

$$L = Q_1 y^2 + (Q_2 - 6D)z^2 + (Q_3 - 3Q_1 D)u^2$$
$$+ (S_1 S_2 - S_3)yz + (S_1 S_3 - S_4)yu + (S_2 S_3 - S_5)zu$$

ove

$$Q_1 = B, \qquad Q_2 = B^2 - 2AC + 8D, \ldots$$

ed è facilissimo il calcolare i valori delle altre funzioni simmetriche per mezzo dei primitivi coefficienti A, B, C, D. Il coefficiente M della $x$ essendo una funzione omogenea di terzo grado delle altre tre indeterminate $y$, $z$, $u$, i nuovi coefficienti

delle diverse potenze delle $y$, $z$, $u$ sono funzioni simmetriche d'indice semplice, e d'indice composto, ed in alcuni termini arriva fino al nono grado; la determinazione di queste funzioni delle radici $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sarebbe assai lunga per poterla esprimere direttamente con i coefficienti A, B, C, D. Ora, come già ho avvertito, a quest' inconveniente ci si provede con introdurre le funzioni simmetriche $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ . . . non solo della ridotta di terzo grado in X, ma ben anche le funzioni simmetriche $P_1$, $P_2$, $P_3$... della nuova equazione di quarto grado in Y, come si vedrà da quanto son per esporre.

6° Le funzioni simmetriche $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . per la nuova equazione di quarto grado in Y porgono

$$P_1 = -C\,,\qquad P_2 = C^2 - 2BD\,,\qquad P_3 = 3BCD - C^3 - 3AD^2\,,\ \ldots\ldots$$

e così per altre, le quali però non occorreranno: in questa guisa il nominato coefficiente M della $x$, funzione omogenea di terzo grado delle tre indeterminate $y$, $z$, $u$ sarà espresso per

$$\begin{aligned} M = {} & P_1 y^3 + P_2 z^3 + P_3 u^3 + (P_1S_1 - 4D)y^2z + (Q_1S_3 - S_1S_4 + S_5)y^2u \\ & + (P_1Q_1 - 3DS_1)yz^2 + [(Q_2 - 6D)P_1 + (S_3 - S_1S_2)D]yu^2 \\ & + (S_1P_2 - DP_1)z^2u + (Q_1P_2 - DS_1P_1 + D^2)zu^2 \\ & + (Q_1Q_2 - 4DQ_1 - Q_3)yzu. \end{aligned}$$

Resta infine l'ultimo termine N indipendente dalla $x$, funzione omogenea di quarto grado delle tre indeterminate $y$, $z$, $u$: questa funzione conterrà quindici termini, e dipenderà la sua ultima espressione dalle sole funzioni simmetriche $S_1$, $S_2$ ... $P_1$, $P_2$... $Q_1$, $Q_2$ ..., e si troverà

$$\begin{aligned} N = {} & Dy^4 + S_1Dy^3z + S_2Dy^3u + Q_1Dy^2z^2 + D(Q_2 - 6D)y^2u^2 \\ & + D(S_1S_2 - S_3)uzy^2 + P_1Dz^3y + (S_1P_1 - 4D)Dyuz^2 \\ & + D(P_1Q_1 - 3DS_1)yzu^2 + P_2Dyu^3 + D^2z^4 + S_1D^2z^3u \\ & + Q_1D^2u^2z + P_1D^2u^3z + D^3u^4. \end{aligned}$$

Raccogliendo tutti questi coefficienti H, L, M, N moltiplicati respettivamente per $x^3$, $x^2$, $x$, $x^0$, e sommati con $x^4$ si otterrà la richiesta forma

$$F = x^4 + Hx^3 + Lx^2 + Mx + N$$

la quale sarà una *funzione biquadratica quaternaria,* e tale che moltiplicata per un' altra funzione composta con altre quattro indeterminate con le medesime costanti A, B, C, D riproduce una nuova funzione della stessa forma; per questa proprietà la F appartiene alla classe delle funzioni somiglianti. Volendola disporre secondo i termini $x^4$, $y^4$, ... $x^3$, $y^3$, ..., si avrà

$$
\begin{aligned}
F = {} & x^4 + Dy^4 + D^2z^4 + D^3u^4 + (S_1y + S_2z + S_3u)x^3 \\
& + (P_1x + S_1Dz + S_2Du)y^3 + (P_2x + P_1Dy + S_1D^2u)z^3 \\
& + (P_3x + P_2Dy + P_1D^2z)u^3 + Q_1x^2y^2 + (Q_2 - 6D)x^2z^2 + (Q_3 - 3Q_1D)x^2u^2 \\
& + Q_1Dy^2z^2 + D(Q_2 - 6D)y^2u^2 + Q_1D^2u^2z^2 + (S_1S_2 - S_3)x^2yz + (S_1S_3 - S_4)x^2yu \\
& + (S_2S_3 - S_5)x^2zu + (P_1S_1 - 4D)y^2xz + (Q_1S_3 - S_1S_4 + S_1)y^2xu \\
& + D(S_1S_2 - S_3)y^2zu + (P_1Q_1 - 3DS_1)z^2xy + (S_1P_2 - DP_2)z^2xu + D(S_1P_1 - D)z^2yu \\
& + [(Q - 6D)P_1 + (S_3 - S_1S_2)D]u^2xy + (Q_1P_2 - DS_1P_1 + D^2)u^2xz \\
& + D[(P_1Q_1 - 3DS_1)u^2yz] + (Q_1Q_2 - 4DQ_1 - Q_3)xyzu.
\end{aligned}
$$

Infine sostituendoci i valori delle funzioni simmetriche $S_1$, $S_2$, ..., $Q_1$, $Q_2$, ..., $P_1$, $P_2$, ..., si otterrebbe l'espressione della stessa F dipendente dai soli coefficienti. Il Sig. *Cayley* in una recente Memoria pubblicata nelle transazioni filosofiche di Londra sotto il titolo: *On the Resultant of a Systemes of two Equations* venendo al dettaglio di molti esempi riduce la ricerca della *risultante* fra due equazioni o dello stesso grado, o di grado differente alla composizione di alcuni quadri, ove i coefficienti numerici con il rispettivo loro segno sono collocati entro caselle, ed al di fuori del quadro in colonna, e riga colle caselle vengono scritti i prodotti dei coefficienti algebrici e delle loro potenze diversamente combinati, quasi come potrebbe accadere nella *Tavola pittagorica*: fra le altre applicazioni io trovo alla pagina 713 vol. per l'anno 1856 *Table* (4. 3) *Resultant of* $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$, $(p, q, r, s)(x, y)^3$ ove con quella scritturazione introdotta dallo stesso Sig. *Cayley* si rappresentano le forme omogenee a due indeterminate con i coefficienti binomiali. Ora è facile a persuadersi, che il problema risoluto per quelle due forme dal Sig. *Cayley*, si riduce alla identica questione da noi considerata. Poniamo infatti nelle due forme del Sig. *Cayley*, $y = 1$ e si cangi $x$ in $\rho$, è chiaro che per le due equazioni avremo

$$a\rho^4 + 4b\rho^3 + 6c\rho^2 + 4d\rho + e = 0, \qquad p\rho^3 + 3q\rho^2 + 3r\rho + s = 0$$

e si sostituisca ora

$$a = 1, \quad 4b = A, \quad 6c = B, \quad 4d = C, \quad e = D$$

$$s = x, \quad 3r = y, \quad 3q = z, \quad p = u,$$

le due equazioni diverranno

$$\rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0, \qquad x + y\rho + z\rho^2 + u\rho^3 = 0$$

e la eliminazione della $\rho$ porgerà il valore della funzione F biquadratica di sopra calcolata. Tutti i quadri adunque riportati dal Sig. *Cayley* per la risultante di quelle due forme, od equazioni dovranno necessariamente contenere tutti i termini della F,

il che potrebbe anche servire per una specie di verificazione. Il Sig. *Faà Di Bruno* prevalendosi della scritturazione ideata dal Sig. *Cayley* riporta egualmente nel n.º 6 di questi *Annali* Novembre-Dicembre 1858 la risultante di due equazioni del quarto grado, e che esso avea già calcolata in uno scritto di sopra citato, ed inserito nel tomo 6.º de'miei precedenti *Annali di Scienze Mat. e Fis.* 1855.

7.º La funzione F da noi calcolata si può anche ottenere dal prodotto dei tre quintinomi

$$\rho_1^4 + A\rho_1^3 + B\rho_1^2 + C\rho_1 + D\,, \qquad \rho_2^4 + A\rho_2^3 + B\rho_2^2 + C\rho_2 + D$$
$$\rho_3^4 + A\rho_2^3 + B\rho_3^2 + C\rho_3 + D$$

quando $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ siano le tre radici dell'equazione

$$x + y\rho + z\rho^2 + u\rho^3 = 0.$$

Infatti i coefficienti delle potenze A, B, C, D, e delle loro combinazioni saranno funzioni simmetriche delle tre radici $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, e quindi esprimibili per i coefficienti $x$, $y$, $z$, $u$, come d'altronde è noto dal metodo generale di eliminazione: ordinato quindi lo sviluppo di F secondo le diverse potenze dei coefficienti A, B, C, D, potrà essa egualmente rappresentare una funzione omogenea di terzo grado a quattro indeterminate A, B, C, D, ed anche sotto questo punto di vista sarà *funzione somigliante*: più generalmente se ad esempio del Sig. *Cayley* si prenderanno le due equazioni

$$(a, b, c, d, e)(\rho, 1)^4 = 0\,, \qquad (x, y, z, u)(\rho, 1)^3 = 0.$$

La risultante, che si ottiene dall'eliminazione di $\rho$, si potrà considerare o come una funzione omogenea biquadratica a quattro indeterminate, o come una funzione cubica a cinque indeterminate $a, b, c, d, e$: secondo la notazione del Sig. *Cayley* potrebbe nel primo caso rappresentarsi sotto la forma

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \omega)(x, y, z, u)^4 = F$$

la quale è composta di trentacinque termini, per cui trentacinque saranno le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ dipendenti dalle sole cinque $a$, $b$, $c$, $d$, $e$. Se ritenute le medesime costanti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... $\omega$ si scelgano altre quattro indeterminate, e si componga la nuova forma

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega)(x_1\,, y_1\,, z_1\,, u_1)^4 = F_1$$

il prodotto $F.F_1$ sarà riducibile ad una forma *somigliante* in modo che assumendo altre quattro indeterminate X, Y, Z, U, si avrà

$$F.F_1 = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega)(X, Y, Z, U)^4$$

Le X, Y, Z, U saranno determinate funzioni di $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$ e dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \ldots \omega$. Questi risultati si possono estendere come è chiaro non solo per un pro-

dotto di un numero qualunque di *forme* della stessa specie, ma ben anche per un numero di *forme* tutte eguali fra di loro, ed il che porgerebbe una potenza $n^{esima}$ di F per cui si potrà sempre soddisfare all'equazione

$$[(\alpha,\beta,\gamma,\ldots\omega)(x,\ y,\ z,\ u)^4]^n = (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \omega)(X,\ Y,\ Z,\ U)^4.$$

L'uso principale di queste differenti equazioni può servire per la risoluzione di alcuni problemi indeterminati, come ne accennai qualcuno in un precedente articolo inserito nel n.° 5° di questi *Annali* dello scorso anno 1858, e del quale argomento forse ritornerò a parlarne in altra circostanza. Queste differenti *forme* o *funzioni somiglianti* che si presentano come l'ultimo termine dell'equazione alla trasformata di *Tischirnaüs* si scorgono pure nei coefficienti delle diverse potenze dell'incognita nella medesima trasformata, se non che in queste altre *forme* l'ordine della dimensione è sempre minore del numero delle indeterminate : così per esempio se per un'equazione del quarto grado, la trasformata di *Tischirnaüs* sia

$$y^4 + 4Py^3 + 6Qy^2 + 4Ry + S = 0$$

i coefficienti S, R, Q, P saranno funzioni omogenee di quarto, di terzo, di secondo, di primo grado delle quattro indeterminate scelte nel valore della $y$.

8.° In molti problemi di analisi pura , ed applicata dipendenti dall' eliminazione spesso accade, che i coefficienti di una delle due equazioni siano funzioni dei coefficienti dell'altra. Questo caso fra gli altri occorre nella determinazione del così detto *discriminante* di una data forma omogenea F, il quale è il risultato dell'eliminazione di $\frac{x}{y}$ fra le due equazioni omogenee $\frac{dF}{dx} = 0$ , $\frac{dF}{dy} = 0$. Il discriminante si ottiene ancora con un dato coefficiente dall' ultimo termine dell' equazione ai quadrati delle differenze fra le radici di un'equazione data. Se dunque sia F una forma omogenea binaria di grado $n$ coi coefficienti binomiali, si avrà

$$F = ax^n + na_1x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}a_2x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.}a_3x^{n-3}y^3$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)}{2}a_{n-2}\,x^2y^{n-2} + na_{n-1}\,xy^{n-1} + a_n\,y^n\ .$$

Formiamo le derivate parziali rispetto ad $x$, ed $y$ quindi eguagliate a zero, divise per $n$ e fatto di più $y = 1$, si avrà

$$ax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}a_2x^{n-3} + \ldots. + (n-1)a_{n-2}\,x + a_{n-1} = 0$$

$$a_1x^{n-1} + (n-1)a_2x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}a_2x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1}\,x + a_n = 0\ .$$

Il risultato proveniente dall'eliminazione della $x$ porge il *discriminante* della forma F. In queste due equazioni di egual grado i coefficienti dell'una sono funzioni dei coefficienti dell'altra. L'eliminazione pei diversi valori particolari di $n$ si agevola nella supposizione che nella forma F, ed equazione somigliante manchi il secondo termine, il che se non fosse si potrebbe sempre ottenere : supposto pertanto $a_1 = 0$ le due precedenti equazioni divengono

$$ax^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_2 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-2}\, x + a_{n-1} = 0$$

$$(n-1)a_2 x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_3 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1} x + a_n = 0\,.$$

Con l'indicata ipotesi si è diminuito ancora di un'unità il grado di una delle due equazioni il che agevolerà l'eliminazione per i particolari valori di $n$. Poniamo di più $a = 1$, ed insieme

$$c_1 = a_2\,,\quad c_2 = \frac{1}{2} a_3\,,\quad c_3 = \frac{1}{3} a_4\,,\quad c_4 = \frac{1}{4} a_5 \ldots\, c_r = \frac{1}{r} a_{r+1}$$

Con queste sostituzioni le due ultime equazioni si ridurranno a quelle di già stabilite anticamente dal Sig. *Cauchy* per la determinazione dell'ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze. La Memoria dell'illustre geometra trovasi inserita nel Cah. 17° del giornale della scuola politecnica sotto il titolo *Mémoire sur la détermination des racines réelles dans les équations algébriques, année* 1813: l'equazioni in proposito sono segnate a pag. 490 con i numeri (3), (4). Nell'ipotesi che $a_1$ non sia nullo, ma che si voglia trasformar l'equazione per togliere il secondo termine, allora i valori di $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, . . . saranno

$$c_1 = a_2^2 - a_1^2\,,\qquad 2c_2 = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$$
$$3c_3 = a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_1^2\, a_2 - 3a_1^4$$
$$4c_4 = a_5 - 5a_1 a_4 + 10a_1^2\, a_3 - 10a_1^2\, a_2 + 4a_1^5$$

Il Sig. *Cauchy* applica le citate equazioni ai casi di $n = 2, 3, 4, 5$. Per $n = 4$ esso trova che l' ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze, può mettersi sotto la forma

$$A_4 = 3^3.4^4\left[(c_3 + c_1^2)^3 - (4c_2^2 - 3c_1\, c_3 + c_1^3)^2\right]$$

Io sotto un punto di vista puramente istorico feci osservare in una lettera diretta al Sig. *Hermite*, ed inserita nei *Comptes Rendus* del 11 Ottobre 1858, che il rapporto $A_4 : 4^4$ per la sostituzione dei valori di $c_1$, $c_2$, $c_3$, è precisamente, $I^3 - 27J^2$, risultato ritrovato in questi ultimi anni dal Sig. *Cayley* per il valore del *discriminante* di una forma omogenea, e di un' equazione somigliante del quarto grado, ed ove I, J. sono i due *invarianti fondamentali* quadratico, e cubico.

9.° Porremo fine a questa breve nota con indicare come la forma F biquadratica, ed a quattro indeterminate riportata al parag. 5.° contenga ancora il valore del *discriminante* di una forma, ed equazione di quinto grado. Nella forma omogenea

$$(a, b, c, d, e, f)(x, y)^5$$

con i coefficienti binomiali prendiamo le derivate parziali rispetto ad $x$, ed $y$, si sostituisca di poi $y = 1$, e si cangi $x$ in $\rho$ : quindi eguagliate a zero, si troverà

$$a\rho^4 + 4b\rho^3 + 6c\rho^2 + 4d\rho + e = 0\,, \qquad b\rho^4 + 4c\rho^3 + 6d\rho^2 + 4e\rho + f = 0$$

Per la supposizione di $a = 1$, e di $b = 0$ diverranno

$$\rho^4 + 6c\rho^2 + 4d\rho + e = 0\,, \qquad 4c\rho^3 + 6d\rho^2 + 4e\rho + f = 0.$$

Se ora queste due equazioni si confrontino con le due riportate al parag. 5.°, cioè

$$\rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0\,, \qquad x + y\rho + z\rho^2 + u\rho^3 = 0\,,$$

e dalle quali con l' eliminazione di $\rho$ si ottenne la forma biquadratica omogenea a quattro indeterminate $x$, $y$, $z$, $u$, si avrà

$$A = 0\,, \quad B = 6c\,, \quad C = 4d\,, \quad D = e\,, \quad x = f\,, \quad y = 4e\,,$$

$$z = 6d\,, \quad u = 4c$$

Fatta adunque una tal sostituzione nel valore di F del parag. 5.°, verrà esso a rappresentare il *discriminante* di un'equazione del quinto grado priva del secondo termine. Questa espressione dovrà quindi coincidere con un dato coefficiente a quella ritrovata dal Sig. *Cauchy* a pag. 496 della citata Memoria , e che esso calcola per l'equazioni del quinto grado, come ultimo termine dell'equazione trasformata ai quadrati delle differenze fra le radici di un'equazione data.

Roma 10. Novembre 1858.



## SULLE LINEE DEL TERZ'ORDINE A DOPPIA CURVATURA.
## TEOREMI
### DEL SIG. PROF. LUIGI CREMONA.

1.° Siano $A = 0$, $D = 0$ le equazioni di due piani osculatori di una cubica gobba (linea del terz'ordine a doppia curvatura); $a$ e $d$ i punti di contatto; sia $B = 0$ l'equazione del piano che tocca la curva in $a$ e la sega in $d$; $C = 0$ l'equazione del piano che tocca la curva in $d$ e la sega in $a$. In un recente lavoro sullo stesso argomento, io ho dimostrato che la cubica gobba può essere rappresentata colle equazioni:

$$A = Bi = Ci^2 = Di^3$$

ove $i$ è un parametro variabile che serve a individuare un punto sulla curva. Ivi è pure dimostrato il seguente teorema dovuto al Sig. Chasles:

*Se per un punto dato nello spazio si conducono alla cubica i tre piani osculatori, il piano de' punti di contatto passa pel punto dato.*

Se le coordinate del punto dato sono $a : b : c : d$, l'equazione del piano è

$$dA - aD + 3(bC - cB) = 0$$

Facilissimamente si dimostra anche il teorema correlativo:

*Se un piano:*

$$pA + qB + rC + sD = 0$$

*sega la cubica in tre punti, i piani osculatori in questi punti concorrono nel punto:*

$$A : B : C : D = -3s : r : -q : 3p$$

*che appartiene al piano dato.*

Inoltre:

*Se da ciascun punto di una retta:*

$$lA + mB + nC = 0\,, \qquad pB + qC + rD = 0$$

*si conducono tre piani osculatori alla curva, il piano de' punti di contatto passa costantemente per un'altra retta, le cui equazioni sono:*

$$(mq - np)A + 3r(mB + nC) = 0\,, \qquad (mq - np)D + 3l(pB + qC) = 0\,;$$

*reciprocamente, se per ciascun punto di questa retta si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de' punti di contatto passa costantemente per la prima retta.*

In generale:

*

*Se da ciascun punto di una superficie geometrica dell'ordine* n *si conducono tre piani osculatori ad una cubica gobba, il piano de' punti di contatto inviluppa una superficie geometrica della classe* n, *e tale che se da ciascun punto di essa si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de'punti di contatto, inviluppa la prima superficie.*

2° Segue da ciò, che a ciascun punto dello spazio corrisponde un piano, e reciprocamente, in questo senso che il piano contiene i punti di contatto della cubica co'suoi piani osculatori passanti pel punto. I punti dello spazio formano così una figura *correlativa* a quella formata dai piani ad essi corrispondenti. Anzi, siccome ciascun punto giace nel piano che gli corrisponde, così l'attuale sistema di figure correlative coincide con quello che il Sig. Chasles ha dedotto dalla considerazione di un sistema di forze, o di un corpo in movimento (vedi l'*Aperçu historique*).

Per brevità, il punto corrispondente ad un dato piano si dirà *fuoco* del piano; e si diranno *reciproche* due rette tali che i fuochi dei piani passanti per l' una sono nell'altra. Siano $x, y, z$ le ordinarie coordinate rettilinee di un punto, e suppongasi:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= a_1x + a_2y + a_3z \\ \mathrm{B} &= b_1x + b_2y + b_3z \\ \mathrm{C} &= c_1x + c_2y + c_3z \\ \mathrm{D} &= d_1x + d_2y + d_3z + 1 \end{aligned}$$

ed inoltre si faccia:

$$a_1 = \mathrm{M}_x, \qquad a_2 = \mathrm{M}_y, \qquad a_3 = \mathrm{M}_z$$

$$\begin{aligned} d_2a_3 - d_3a_2 + 3(b_2c_3 - b_3c_2) &= \mathrm{X} \\ d_3a_1 - d_1a_3 + 3(b_3c_1 - b_1c_3) &= \mathrm{Y} \\ d_1a_2 - d_2a_1 + 3(b_1c_2 - b_2c_1) &= \mathrm{Z}. \end{aligned}$$

Allora l'equazione del piano il cui fuoco ha le coordinate $x_0$, $y_0$, $z_0$ si può scrivere così:

$$(x_0 - x)\mathrm{M}_x + (y_0 - y)\mathrm{M}_y + (z_0 - z)\mathrm{M}_z$$
$$+ \mathrm{X}(yz_0 - zy_0) + \mathrm{Y}(zx_0 - xz_0) + \mathrm{Z}(xy_0 - yx_0) = 0$$

ed inversamente, le coordinate del fuoco del piano:

$$px + qy + rz + s = 0$$

sono:

$$\frac{q\mathrm{M}_z - r\mathrm{M}_y - s\mathrm{X}}{p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + r\mathrm{Z}}, \quad \frac{r\mathrm{M}_x - p\mathrm{M}_z - s\mathrm{Y}}{p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + r\mathrm{Z}}, \quad \frac{p\mathrm{M}_y - q\mathrm{M}_x - s\mathrm{Z}}{p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + r\mathrm{Z}}.$$

Ammesso che le X, Y, Z, $\mathrm{M}_x$, $\mathrm{M}_y$, $\mathrm{M}_z$ rappresentino le somme delle forze com-

ponenti e le somme dei momenti delle coppie componenti, relative agli assi coordinati e dovute ad un sistema di forze di forma invariabile, il piano corrispondente ad un dato punto sarà quello della *coppia risultante relativa a quel punto,* e viceversa il fuoco di un dato piano sarà il punto a cui corrisponde la coppia risultante situata in quel piano. È poi noto che alle proprietà de'sistemi di forze corrispondono analoghe proprietà del movimento di un corpo. Dunque tutte le *proprietà geometriche* de'sistemi di forze, o del moto di un corpo rigido si tradurranno in teoremi relativi alle cubiche gobbe.

3° Passo ad altre proprietà, nel dimostrar le quali farò sempre uso delle coordinate di Plücker (*Punct–Coordinaten*).

Considero il piano:

$$(1) \qquad A - \sigma B + \sigma_1 C - \sigma_2 D = 0$$

ove:

$$\sigma = \lambda + \mu + \nu , \qquad \sigma_1 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu , \qquad \sigma_2 = \lambda\mu\nu ;$$

il fuoco di questo piano è:

$$A : B : C : D = 3\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma : 3 .$$

Pongo:

$$A - (\mu + \nu)B + \mu\nu C = \lambda(\mu^2 + \nu^2)\alpha$$
$$A - (\nu + \lambda)B + \nu\lambda C = \mu(\nu^2 + \lambda^2)\beta$$
$$A - (\lambda + \mu)B + \lambda\mu C = \nu(\lambda^2 + \mu^2)\gamma.$$

Prese insieme all'equazione (1) le equazioni:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 0$$

rappresentano i lati del triangolo inscritto nella cubica e posto nel piano (1); e le

$$\beta - \gamma = 0 , \qquad \gamma - \alpha = 0 , \qquad \alpha - \beta = 0$$

rappresentano le rette congiungenti i vertici del triangolo al fuoco del piano. Allora le coniugate armoniche di ciascuna di queste tre ultime rette rispetto alle altre due saranno:

$$\beta + \gamma = 0 , \qquad \gamma + \alpha = 0 , \qquad \alpha + \beta = 0$$

le quali incontrano, com'è noto, i lati corrispondenti del triangolo in tre punti posti nella retta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Questa retta, che rispetto al piano (1) ha tale proprietà esclusiva si denominerà *direttrice* del piano stesso.

4° Nella memoria citata ho dimostrato un teorema, di cui qui ricorderò l'enun-

ciato. Premetto che per *polo di un piano rispetto ad una linea di second'ordine* intenderò il polo della retta comune a quel piano ed al piano della linea. Ciò posto, l'enunciato di cui si tratta è il seguente:

*Il luogo dei poli di un dato piano rispetto a tutte le coniche, secondo le quali i piani osculatori di una cubica gobba segano la superficie sviluppabile di cui questa è lo spigolo di regresso, è una conica situata in un piano individuato. Reciprocamente, il luogo dei poli di questo piano rispetto a tutte quelle coniche è un'altra conica posta nel primo piano dato.*

Due piani dotati di questa scambievole proprietà si sono denominati *congiunti*; *congiunte* ponno dirsi anco le coniche in essi situate; *congiunti* i triangoli inscritti nella cubica e posti in tali piani, e da ultimo *congiunti* i triedri formati dai piani osculatori che concorrono ne'fuochi de'due medesimi piani.

5.° L'equazione del piano congiunto al piano (1) è:

$$(2) \qquad A - sB + s_1C - s_2D = 0$$

ove:

$$s = l + m + n\,, \quad s_1 = mn + nl + lm\,, \quad s_2 = lmn$$

essendo:

$$l = \frac{\lambda(\mu+\nu) - 2\mu\nu}{2\lambda - (\mu+\nu)}\,, \quad m = \frac{\mu(\nu+\lambda) - 2\nu\lambda}{2\mu - (\nu+\lambda)}\,, \quad n = \frac{\nu(\lambda+\mu) - 2\lambda\mu}{2\nu - (\lambda+\mu)}$$

epperò:

$$s = \frac{3(\sigma^2\sigma_1 + 9\sigma\sigma_2 - 6\sigma_1^2)}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}$$

$$s_1 = \frac{3(-\sigma\sigma_1^2 + 6\sigma^2\sigma_2 - 9\sigma_1\sigma_2)}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}$$

$$s_2 = \frac{9\sigma\sigma_1\sigma_2 - 27\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}\,.$$

Le equazioni della retta che unisce i fuochi de'due piani (1) e (2) sono:

$$(3) \qquad Ap - Bq + Cr = 0\,, \qquad Bp - Cq + Dr = 0$$

ove:

$$p = \sigma^2 - 3\sigma_1\,, \qquad q = \sigma\sigma_1 - 9\sigma_2\,, \qquad r = \sigma_1^2 - 3\sigma\sigma_2\,.$$

L'eguaglianza de'coefficienti nelle due equazioni (3) mostra che la retta da esse rappresentata si appoggia alla cubica in due punti (reali o ideali), i cui parametri $i_1$, $i_2$ sono dati dalle:

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p}\,, \qquad i_1 i_2 = \frac{r}{p}\,,$$

dunque:

*Ogni retta congiungente i fuochi di due piani congiunti è una corda della cubica gobba.*

Le equazioni della retta comune ai due piani (1) e (2) sono :

$$(4)\quad (q^2-pr)\mathrm{A} - 3r(\mathrm{B}q-\mathrm{C}r) = 0\ ,\quad (q^2-pr)\mathrm{D} + 3p(\mathrm{B}p-\mathrm{C}q) = 0$$

la forma delle quali mostra che questa retta è l'intersezione dei piani osculatori della cubica ai punti :

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p}\ ,\quad i_1 i_2 = \frac{r}{p}$$

dunque :

*La retta intersezione di due piani congiunti è anco l'intersezione dei piani osculatori della cubica gobba ai punti ove si appoggia la retta che unisce i fuochi de' due piani congiunti.*

Formando le equazioni delle *direttrici* dei piani congiunti (1) e (2) si trovano per entrambe le equazioni (4), dunque :

*Due piani congiunti hanno la stessa direttrice, la quale è la retta ad essi comune.*

Confrontando le equazioni (3) e (4) si riconosce che esse rappresentano rette *reciproche;* ossia :

*La retta che unisce i fuochi di due piani congiunti, e la loro comune direttrice sono rette reciproche; cioè se per ciascun punto dell'una di esse si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de' punti di contatto passa costantemente per l'altra.*

6.° Cerchiamo se una retta che sia corda della cubica contenga i fuochi di una sola coppia di piani congiunti. Il piano :

$$\mathrm{B} - \omega\mathrm{C} = 0$$

è congiunto al piano :

$$2\mathrm{A} - 3\omega\mathrm{B} - 3\omega^2\mathrm{C} + 2\omega^2\mathrm{D} = 0$$

e la retta congiungente i loro fuochi è rappresentata dalle :

$$(5)\qquad \mathrm{A} - \omega\mathrm{B} + \omega^2\mathrm{C} = 0\ ,\qquad \mathrm{B} - \omega\mathrm{C} + \omega^2\mathrm{D} = 0$$

Affinchè questa retta passi anche pe' fuochi di due altri piani congiunti, le cui equazioni siano (1) e (2), il sistema delle equazioni (5) dovrà essere equivalente al sistema delle (3); epperò si dovrà avere :

$$q = p\omega\ ,\qquad r = p\omega^2$$

il che dà :

$$p = \sigma^2 - 3\omega\sigma + 9\omega^2\ ,\quad \sigma_1 = \omega(\sigma - 3\omega)\ ,\quad \sigma_2 = -\omega^3$$

$$s = \frac{3\omega(\sigma - 6\omega)}{2\sigma - 3\omega}\ ,\qquad s_1 = \omega(s - 3\omega)\ ,\qquad s_2 = \sigma_2$$

per cui le equazioni (1) e (2) divengono:

$$(6)\qquad \begin{aligned} A - 3\omega^2 C + \omega^3 D - \sigma(B - \omega C) &= 0\,, \\ A - 3\omega^2 C + \omega^3 D - s(B - \omega C) &= 0 \end{aligned}$$

rimanendo $\sigma$ indeterminata. Queste equazioni rappresentano infinite coppie di piani tutti passanti per la retta rappresentata dalle:

$$A - 3\omega^2 C + \omega^3 D = 0\,, \qquad B - \omega C = 0$$

ossia:

$$2A - 3\omega B - 3\omega^2 C + 2\omega^3 D = 0\,, \qquad B - \omega C = 0.$$

Ne concludiamo che:

*Qualunque retta che sia corda della cubica gobba contiene i fuochi di infinite coppie di piani congiunti tutti passanti per una stessa retta, la quale è l'intersezione dei piani osculatori della cubica ne'punti comuni a questa ed alla prima retta.*

De questo teorema consegue quest'altro:

*Per qualunque retta che sia l'intersezione di due piani osculatori della cubica gobba passano infinite coppie di piani congiunti, tutti aventi i fuochi su di una stessa retta, la quale si appoggia alla cubica ne'punti di contatto de'due piani osculatori passanti per la prima retta.*

7.° La relazione fra $s$ e $\sigma$, che si può scrivere così:

$$2s\sigma - 3\omega(s + \sigma) + 18\omega^2 = 0$$

mostra che i piani rappresentati dalle equazioni (6) formano una involuzione. Dunque:

*Le infinite coppie di piani congiunti passanti per una stessa retta che sia comune intersezione di due piani osculatori della cubica gobba, sono in involuzione. I piani anto-coniugati della involuzione sono i due piani osculatori. I fuochi di tutti que'piani congiunti formano pure una involuzione, i cui elementi anto-coniugati sono i punti di contatto de'due piani osculatori.*

Per avere il *punto centrale* dell'involuzione de'fuochi si condurrà per la *direttrice* il piano parallelo alla *focale* (retta contenente i fuochi). Questo piano ha il suo fuoco a distanza infinita, quindi il piano che gli è congiunto, ossia coniugato nella involuzione avrà per fuoco il punto centrale richiesto, e sarà il *piano centrale* della involuzione di piani.

La cubica gobba ammette due piani osculatori paralleli fra loro, cioè segantisi secondo la retta *direttrice* posta nel piano all'infinito. Essi ponno quindi risguardarsi come gli elementi anto-coniugati di una involuzione di piani congiunti paralleli. Il piano centrale di questa involuzione avrà per congiunto quello all'infinito, e quindi sarà quello contenente i centri delle coniche secondo cui i piani osculatori della cubica segano la superficie luogo delle sue tangenti.

8°. Per un punto dato nello spazio, di coordinate $a : b : c : d$ passa una retta appoggiantesi alla cubica in due punti; le sue equazioni sono :

$$(c^2 - bd)\mathrm{A} + (bc - ad)\mathrm{B} + (b^2 - ac)\mathrm{C} = 0 ,$$

$$(c^2 - bd)\mathrm{B} + (bc - ad)\mathrm{C} + (b^2 - ac)\,\mathrm{D} = 0$$

e pe'punti comuni alla retta ed alla cubica si ha :

$$i_1 + i_2 = \frac{ad - bc}{c^2 - bd} , \qquad i_1 i_2 = \frac{b^2 - ac}{c^2 - bd} .$$

La retta è sempre reale, benchè i due punti possano essere ideali.

In un piano dato qualsivoglia :

$$l\mathrm{A} + m\mathrm{B} + n\mathrm{C} + h\mathrm{D} = 0$$

esiste una sola retta, comune intersezione di due piani osculatori. Le sue equazioni sono :

$$(q^2 - pr)\mathrm{A} - 3r(\mathrm{B}q - \mathrm{C}r) = 0 , \qquad (q^2 - pr)\mathrm{A} + 3p(\mathrm{B}p - \mathrm{C}q) = 0$$

avendosi pe'punti di contatto :

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p} = \frac{mn - 9hl}{3ln - m^2} , \qquad i_1 i_2 = \frac{r}{p} = \frac{3hm - n^2}{3ln - m^2} .$$

La retta è sempre reale, benchè i due piani osculatori possano essere ideali. Ossia:

*Per un punto dato nello spazio passa sempre una retta ( ed una sola) che è focale di un fascio di piani congiunti. In un piano dato esiste sempre una retta (ed una sola) che è direttrice di un fascio di piani congiunti. Se il punto dato è il fuoco del piano dato le due rette loro reciproche , e i due fasci di piani congiunti coincidono in un solo fascio.*

Per ogni punto dello spazio passano tre piani osculatori della cubica, epperò tre rette, ciascuna delle quali è direttrice di un fascio di piani congiunti. Se i tre piani osculatori sono reali, anche le tre direttrici sono reali; ma se due de'piani osculatori sono ideali, si ha una sola direttrice reale, ed è quella comune ai due piani ideali.

Un piano qualunque sega la cubica in tre punti, epperò contiene tre rette, ciascuna delle quali è focale di un fascio di piani congiunti. Se i tre punti d'intersezione sono reali, tali sono anche le tre rette che li uniscono a due a due; ma se due di quelli sono ideali , si ha una sola focale reale , ed è la retta che passa pe' due punti ideali. Ossia :

*Per un punto qualunque dello spazio passano o tre rette direttrici reali o una sola, secondo che per quel punto si ponno condurre alla cubica tre piani osculatori reali o un solo. In un piano qualunque esistono tre rette focali reali o una sola, secondoche quel piano sega la cubica in tre punti reali o in un solo.*

Credo interessante la proprietà che segue:

*Se una retta focale incontra la cubica in due punti reali, e per conseguenza la relativa direttrice esiste in due piani osculatori reali, ciascun piano passante per questa incontra la cubica in un solo punto reale. All'incontro, se la focale incontra la cubica in due punti ideali, ogni piano passante per la direttrice incontra la cubica in tre punti reali. Ossia: ciascun piano di un fascio di piani congiunti in involuzione, incontra la cubica in tre punti reali o in uno solo, secondo che gli elementi anto-coniugati della involuzione sono ideali o reali.*

Infatti, affinchè la retta (3) incontri la cubica in due punti reali è necessario e sufficiente che sia:

$$q^2 - 4pr > 0$$

ossia, ponendo per $p$, $q$, $r$ i loro valori in funzione di $\sigma$, $\sigma_1$ e $\sigma_2$:

$$27\sigma_2^2 - 18\sigma\sigma_1\sigma_2 - \sigma^2\sigma_1^2 + 4\sigma_1^3 + 4\sigma^3\sigma_2 > 0$$

la quale è appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione:

$$i^3 - \sigma i^2 + \sigma_1 i - \sigma_2 = 0$$

che dà i parametri de'punti comuni alla cubica ed al piano (1), abbia due radici imaginarie; *c. d. d.*

9.° Se prendiamo in considerazione due piani *congiunti*, essi danno luogo a *figure* abbastanza interessanti. Per conseguire formole più semplici e simmetriche faccio la seguente trasformazione di coordinate:

$$x = \mathrm{A}, \quad y = -\omega^3\mathrm{D}, \quad z = \omega^3\mathrm{D} - 3\omega^2\mathrm{C} + 3\omega\mathrm{B} - \mathrm{A},$$
$$w = 2\mathrm{A} - 3\omega\mathrm{B} - 3\omega^2\mathrm{C} + 2\omega^3\mathrm{D}.$$

Le equazioni:

$$w = 0, \qquad x + y + z = 0$$

rappresentano due piani *congiunti*; le:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

rappresentano i piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano $x+y+z=0$, e le:

$$3(y-z) - w = 0, \quad 3(z-x) - w = 0, \quad 3(x-y) - w = 0$$

sono quelle de'piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano $w=0$. Ne'due piani congiunti esistono le due coniche che ho denominate *congiunte*. Quella che è nel piano $w = 0$ è rappresentata dalle equazioni:

$$(7) \qquad w = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$$

epperò questa conica è inscritta nel triangolo formato dalle rette secondo cui il piano $w = 0$ è segato dai piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano ad esso congiunto.

Considerando la figura che è nel piano $w=0$, le rette che uniscono i vertici del triangolo or nominato ai punti di contatto della conica inscritta sono:

$$(8) \qquad w=0 \quad (y-z=0\,,\ z-x=0\,,\ x-y=0)$$

le quali sono le intersezioni del piano $w=0$ coi piani osculatori che concorrono nel suo fuoco. Il punto comune a queste tre rette, ossia il fuoco del piano $w=0$ è rappresentato dalle equazioni:

$$w=0\,, \qquad x=y=z.$$

I punti in cui il piano $w=0$ sega la cubica sono:

$$w=0 \quad (x:y:z=-8:1:1\,;\quad x:y:z=1:-8:1\,;\quad x:y:z=1:1:-8)$$

epperò i lati del triangolo da essi formato hanno per equazioni le:

$$w=0 \quad (7x+y+z\,;\qquad x+7y+z\,,\qquad x+y+7z).$$

Questo triangolo, e il triangolo circoscritto alla conica (7) sono *omologici*; le rette che congiungono i loro vertici corrispondenti sono le (8) che concorrono nel fuoco del piano $w=0$; e i lati omologhi si segano in tre punti posti nella retta:

$$w=0\,, \qquad x+y+z=0$$

la quale è la *direttrice* comune dei due piani congiunti. Si noti inoltre che il fuoco è il polo della direttrice rispetto alla conica (7). Riunendo insieme queste proprietà possiamo enunciare il seguente teorema:

*Dati due piani congiunti* P, P', *in ciascuno di essi, per es. in* P, *esistono due triangoli, l'uno* ABC *inscritto nella cubica; l'altro* abc *avente i lati ne' piani osculatori concorrenti nel fuoco* F' *dell'altro piano* P'. *I due triangoli* ABC, abc *sono omologici; il loro centro d'omologia è il fuoco* F *del piano* P, *e l'asse d'omologia è la direttrice o comune intersezione de' piani* P, P'. *La direttrice è la polare dei fuochi* F, F' *rispetto alle coniche congiunte situate ne' piani dati, e queste sono inscritte nei triangoli* abc, a'b'c' *determinati dalle due terne di piani osculatori. Le rette che in ciascuno de' piani dati, per es. in* P, *uniscono i punti di contatto della rispettiva conica ai vertici opposti del triangolo circoscritto* abc *sono situate nei piani osculatori che concorrono nel fuoco* F' *dello stesso piano* P.

10. Le facce corrispondenti dei due *triedri congiunti*, formati dalle due terne di piani osculatori concorrenti ne' fuochi de' due piani congiunti, si segano, secondo tre rette, le quali determinano l'iperboloide:

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy-\left(\tfrac{1}{3}w\right)^2=0$$

ovvero

$$x'^2+y'^2+z'^2-2y'z'-2z'x'-2x'y'-\left(\tfrac{1}{3}w'\right)^2=0$$

ove:

$$3(y - z) - w = 3x'\,; \quad 3(z - x) - w = 3y'; \quad 3(x - y) - w = 3z'\,;$$

$$3(x + y + z) = w'.$$

Questo iperboloide passa evidentemente per le due coniche congiunte, dunque:

*Le rette secondo le quali si segano le facce corrispondenti di due triedri congiunti, e le rispettive coniche congiunte giacciono in uno stesso iperboloide. Le coniche congiunte sono le curve di contatto dell' iperboloide coi coni involventi che hanno i vertici ne' fochi de' piani congiunti.*

Qualunque superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro:

$$x = y = z = w = 0$$

è rappresentabile coll'equazione:

$$fyz + gzx + hxy + lxw + myw + nzw = 0$$

ed analogamente ogni superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro:

$$x' = y' = z' = w' = 0$$

ha un'equazione della forma:

$$f'y'z' + g'z'x' + h'x'y' + l'x'w' + m'y'w' + n'z'w' = 0.$$

Affinchè queste due superficie coincidano in una sola devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} = \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$$

$$3(n - m) - f = 0\,, \quad 3(l - n) - g = 0\,, \quad 3(m - l) - h = 0$$

quindi ogni superficie di second' ordine circoscritta ai due tetraedri simultaneamente sarà compresa nella equazione:

$$(n - m)yz + (l - n)zx + (m - l)xy + \tfrac{1}{3}w\,(lx + my + nz) = 0$$

la quale contenendo ancora due arbitrarie $l : m : n$, esprime il teorema:

*Ogni superficie di second'ordine passante per sette vertici di due tetraedri formati da due piani congiunti e dai relativi triedri congiunti passa anche per l'ottavo.*

11. Terminerò coll'enunciare alcuni teoremi che si deducono da quelli sopra dimostrati, mediante il principio di dualità.

*I piani polari di un punto dato rispetto a tutt'i coni di second'ordine che hanno i vertici sulla cubica gobba inviluppano un cono di second'ordine che ha il vertice in un punto individuato. Reciprocamente i piani polari di questo secondo punto inviluppano un altro cono di second'ordine che ha il vertice nel primo punto.*

Due punti dotati di questa scambievole proprietà si diranno *congiunti*, e *congiunti* anco i relativi coni di second'ordine.

*Due piani congiunti hanno per fuochi due punti congiunti, e viceversa due punti congiunti sono i fuochi di due piani congiunti.*

Sia dato un punto; per esso passano tre piani osculatori della cubica e un piano A, di cui il punto dato è il fuoco. Questo piano sega gli altri tre in tre rette; si cerchi la quarta armonica di ciascuna fra esse rispetto alle altre due; si otterranno così tre nuove rette passanti pel punto dato e poste nel piano A. Queste tre rette determinano cogli spigoli rispettivamente opposti del triedro formato dai piani osculatori tre piani che passano per una stessa retta. Questa retta che ha rispetto al punto dato tale proprietà esclusiva, si dirà la *focale* del punto.

*Due punti congiunti hanno la stessa focale, la quale è la retta che li unisce.*

*Se per una retta direttrice passano due piani osculatori reali, e per conseguenza la relativa focale si appoggia alla cubica in due punti reali, per ciascun punto di questa passa un solo piano osculatore reale. Se all'incontro la direttrice è l'intersezione di due piani osculatori ideali, da ciascun punto della focale si potranno condurre alla cubica tre piani osculatori reali. Ossia: da ciascun punto di una involuzione di fuochi congiunti si ponno condurre alla cubica tre piani osculatori reali o un solo, secondo che i punti anto-coniugati della involuzione sono ideali o reali.*

*Dati due punti congiunti* F, F' *(fuochi di due piani congiunti* P, P'*), ciascuno di essi, per es.* F *è il vertice di due triedri, l'uno* FABC *formato dai piani osculatori concorrenti in* F*, l'altro* Fabc *avente gli spigoli passanti per que' punti della cubica che sono nel piano* P'. *I due triedri* FABC, Fabc *sono omologici; il piano d'omologia* (il piano ove sono le rette intersezioni delle facce opposte de' due triedri) *è il piano* P; *l'asse d'omologia* (la retta per cui passano i piani determinati dalle coppie di spigoli opposti de' due triedri) *è la focale comune* FF'. *Questa focale è la polare de' due piani congiunti* P, P' *rispetto ai coni congiunti, e questi sono circoscritti ai triedri* Fabc, F'a'b'c' *i cui spigoli si appoggiano alla cubica. Le rette che, per ciascun punto congiunto, per es.* F, *sono le intersezioni delle facce del triedro inscritto* Fabc *coi piani tangenti al cono circoscritto lungo gli spigoli rispettivamente opposti passano pe' punti della cubica che appartengono al piano* P.

*Le rette che uniscono i vertici omologhi di due triangoli* (ossia triangoli inscritti nella cubica e posti in piani congiunti) *determinano un iperboloide toccato dai relativi coni congiunti lungo due curve poste nei piani congiunti.*

*Ogni superficie di second'ordine tangente a sette facce di due tetraedri determinati da due triangoli congiunti e dai relativi fuochi tocca anche l'ottava.*

Cremona, Ottobre 1858.



# SUI PUNTI FOCALI NELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO.

## NOTA

DEL DOTT. TOMMASO DEL BECCARO.

Negli Annali compilati dai Sigg. Terquem e Gerono (Juillet 1858) vennero enunciati in modo però inesatto ed incompleto, alcuni Teoremi del Sig. Heilermann intorno alle proprietà dei punti focali nelle superficie di secondo grado dotate di centro. La inesattezza dell'enunciato di alcuni di loro dipende poi dall'essere stato confuso il piano osculatore in un punto d'una linea di curvatura d' una superficie con quello condotto per la tangente alla linea e per la normale alla superficie: inoltre gli altri Teoremi fondamentali non hanno poi quella generalità che comportano. Laonde in questa Nota mi propongo di dimostrare i Teoremi del Sig. Heilermann, dando però all'enunciato d'alcuni di essi forma differente, di estenderli alle superficie di secondo grado prive di centro, ed in fine di esporre alcune nuove proprietà appartenenti a tali punti focali.

1.

Consideriamo i due seguenti sistemi di superficie di secondo grado ortogonali:

$$(\Sigma)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=\Sigma_1=0 \quad \text{ove} \quad c>b\,,\ \lambda>b>c\\
&\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}-1=\Sigma_2=0 \qquad \mu>b<c\\
&\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}-1=\Sigma_3=0 \qquad \nu<b<c
\end{aligned}\right.$$

$$(S)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{y^2}{\rho+a}+\frac{z^2}{\rho-a}-4(x+\rho)=S_1=0 \qquad \rho>a\\
&\frac{y^2}{\sigma+a}+\frac{z^2}{\sigma-a}-4(x+\sigma)=S_2=0 \qquad \sigma<a\\
&\frac{y^2}{\tau-a}+\frac{z^2}{\tau+a}+4(x-\tau)=S_3=0 \qquad \tau>0
\end{aligned}\right.$$

È noto come le curve d'intersezione delle superficie ortogonali sieno linee di curvatura appartenenti nel medesimo tempo alle due superficie di cui sono respettivamente

le comuni intersezioni. Quindi per un punto dello spazio considerato come intersezione delle tre superficie di un sistema $(\sum)$, (S) passano tre linee di curvatura a due a due appartenenti a ciascuna superficie ed i piani normali ad esse hanno per equazioni

$$\left.\begin{array}{l}
N_{12} \dots \frac{x}{\nu^2}\xi + \frac{y}{\nu^2-b^2}\eta + \frac{z}{\nu^2-c^2}\zeta - 1 = 0, \text{ per } \sum_1 = 0\ \sum_2 = 0 \\
N_{13} \dots \frac{x}{\mu^2}\xi + \frac{y}{\mu^2-b^2}\eta + \frac{z}{\mu^2-c^2}\zeta - 1 = 0, \text{ per } \sum_1 = 0\ \sum_3 = 0 \\
N_{23} \dots \frac{x}{\lambda^2}\xi + \frac{y}{\lambda^2-b^2}\eta + \frac{z}{\lambda^2-c^2}\zeta - 1 = 0, \text{ per } \sum_2 = 0\ \sum_3 = 0
\end{array}\right\} (\rho)$$

$$\left.\begin{array}{l}
M_{12} \dots \frac{\xi}{\rho+\sigma+\tau} + \frac{(\rho+a)(a+\sigma)}{ay(\rho+\sigma+\tau)}\eta + \frac{(\rho-a)(a-\sigma)}{az(\rho+\sigma+\tau)}\zeta - 1 = 0 \text{ per } S_1=0\ S_2=0 \\
M_{13} \dots \frac{\xi}{\rho-\sigma-\tau} + \frac{(\rho+a)(\tau-a)}{ay(\tau+\sigma-\rho)}\eta + \frac{(\rho-a)(\tau+a)}{az(\rho-\tau-\sigma)}\zeta - 1 = 0 \text{ per } S_1=0\ S_3=0 \\
M_{23} \dots \frac{\xi}{\sigma-\tau-\rho} + \frac{(\sigma+a)(\tau-a)}{ay(\tau+\rho-\sigma)}\eta + \frac{(\rho-a)(\tau+a)}{az(\sigma-\tau-\rho)}\zeta - 1 = 0 \text{ per } S_2=0\ S_3=0
\end{array}\right\} (r)$$

avendo tenuto conto delle relazioni :

$$bcx = \lambda\mu\nu\,; \quad by\sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{\lambda^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,;$$
$$cz\sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{\lambda^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}$$

pel primo sistema $(\sum)$, e

$$x = \tau-\rho-\sigma\,, \quad y = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sqrt{\rho+a}\,\sqrt{a+\sigma}\,\sqrt{\tau-a}, \quad z = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\rho-a}\,\sqrt{a-\sigma}\,\sqrt{\tau+a}$$

pel secondo sistema (S).

Considerando i segmenti da ogni coppia di piani normali alle due linee di curvatura di una stessa superficie $(\sum)$, $[N_{12}\, N_{13}]$, $[N_{21}\, N_{23}]$, $[N_{31}\, N_{32}]$ tagliati sui suoi assi, i punti e che sono equidistanti dal centro comune delle superficie $(\sum)$ e che dividono ogni segmento in rapporto armonico sono determinati dalle equazioni

$$x_1 = \pm\frac{bc}{\lambda}\,, \quad y_1 = \pm\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}\sqrt{-1}\,, \quad z_1 = \pm\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}} \text{ pei piani } [N_{12}\, N_{13}]$$

relativi alla superficie $\sum_1 = 0$ di parametro $\lambda$ (2)

$$x_2 = \pm \frac{bc}{\mu},\ y_2 = \pm \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}\sqrt{-1},\ z_2 = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}\sqrt{-1} \text{ pei piani } [N_{21}\, N_{23}]$$

relativi alla superficie $\sum_2 = 0$ di parametro $\mu$ (3)

$$x_3 = \pm \frac{bc}{\nu},\ y_3 = \pm \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}},\ z_3 = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\sqrt{-1} \text{ pei piani } [N_{31}\, N_{32}]$$

relativi alla superficie $\sum_3 = 0$ di parametro $\nu$ (4).

Quindi considerando i segmenti da ogni coppia di piani $[M_{12}\, M_{13}]$, $[M_{21}\, M_{23}]$, $[M_{31}\, M_{32}]$ tagliati sull'asse delle $x$ (asse comune ai paraboloidi S), i punti che dividono ciascun segmento in parti eguali sono dati da

$x_1 = \rho$ pei piani $[M_{12}\, M_{13}]$ relativi alla superficie $S_1 = 0$ di parametro $\rho$ (2')
$x_1 = \sigma$ pei piani $[M_{21}\, M_{23}]$ relativi alla superficie $S_2 = 0$ di parametro $\sigma$ (3')
$x_3 = -\tau$ pei piani $[M_{31}\, M_{32}]$ relativi alla superficie $S_3 = 0$ di parametro $\tau$ (4').

Inoltre dalla forma delle equazioni (1) (1') resulta che ogni piano $N_{12}$ (per es.) od $M_{12}$ passa e per la normale alla superficie $\sum_1 = 0$ o $S_1 = 0$ e per la tangente condotta alla linea di curvatura ($\sum_1 = 0$ $\sum_2 = 0$) o ($S_1 = 0$ $S_2 = 0$) cosicchè ogni coppia dei piani N od M relativi ad una superficie coincide con quella formata dai piani delle sue sezioni normali principali.

Ed è parimenti noto dalla Teoria della curvatura delle superficie come gli ombilici di una superficie $\sum$ od S sieno i punti d'intersezione di questa colle curve (reali od immaginarie) limiti delle tre famiglie delle superficie ortogonali e perciò abbiano per coordinate:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[x = 0,\ y = \pm \frac{b\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\sqrt{-1},\ z = \pm \frac{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\right]\\
&\left[y = 0,\ x = \pm \frac{b\lambda}{c},\ z = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c}\right],\\
&\left[z = 0,\ x = \pm \frac{c\lambda}{b},\ y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{b}\sqrt{-1}\right]
\end{aligned}\right\} \text{ ombilici di } \textstyle\sum_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[x = 0,\ y = \pm \frac{b\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\sqrt{-1},\ z = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\right]\\
&\left[y = 0,\ x = \pm \frac{b\mu}{c},\ z = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c}\sqrt{-1}\right],\\
&\left[z = 0,\ x = \pm \frac{c\mu}{b},\ y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b}\sqrt{-1}\right]
\end{aligned}\right\} \text{ ombilici di } \textstyle\sum_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[x=0,\ y=\pm\frac{b\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},\ z=\pm\frac{c\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}\sqrt{-1}\right]\\ \left[y=0,\ x=\pm\frac{b\nu}{c},\ z=\pm\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{-1}}{c}\right],\\ \left[z=0,\ x=\pm\frac{c\nu}{b},\ y=\pm\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b}\right]\end{array}\right\}\ \text{ombilici di } \Sigma_3=0$$

$$\left.\begin{array}{l}[y=0,\ x=2a-\rho,\ z=2\sqrt{2a(\rho-a)}]\\ [z=0,\ x=-(\rho+2a),\ y=2\sqrt{2a(\rho+a)}\sqrt{-1}]\end{array}\right\}\ \text{ombilici di } S_1=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}[y=0,\ x=2a-\sigma,\ z=2\sqrt{2a(a-\sigma)}\sqrt{-1}]\\ [z=0,\ x=-(\sigma+2a),\ y=2\sqrt{2a(\sigma+a)}\sqrt{-1}]\end{array}\right\}\ \text{ombilici di } S_2=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}[y=0,\ x=2a+\tau,\ z=2\sqrt{2a(\tau+a)}\sqrt{-1}]\\ [z=0,\ x=(2a-\tau),\ y=2\sqrt{2a(\tau-a)}]\end{array}\right\}\ \text{ombilici di } S_3=0\,.$$

Dai quali valori resulta che essi giacciono quattro a quattro in ciascuno dei piani principali della superficie, e che le normali a questa in essi sono comprese nei medesimi piani. Per le espressioni (2) (3) (4); (2') (3') (4') alle equazioni di tali normali si può dare la forma :

$$\xi=0,\frac{\eta}{y_1}+\frac{\zeta}{z_1}-1=0;\ \eta=0,\frac{\xi}{x_1}+\frac{\zeta}{z_1}-1=0;\ \zeta=0,\frac{\xi}{x_1}+\frac{\eta}{y_1}-1=0\ \text{normali a } \Sigma_1=0;$$

$$\xi=0,\frac{\eta}{y_2}+\frac{\zeta}{z_2}-1=0;\ \eta=0,\frac{\xi}{x_2}+\frac{\zeta}{z_2}-1=0;\ \zeta=0,\frac{\xi}{x_2}+\frac{\eta}{y_2}-1=0\ \text{normali a } \Sigma_2=0;$$

$$\xi=0,\frac{\eta}{y_3}+\frac{\zeta}{z_3}-1=0;\ \eta=0,\frac{\xi}{x_3}+\frac{\zeta}{z_3}-1=0;\ \zeta=0,\frac{\xi}{x_3}+\frac{\eta}{y_3}-1=0\ \text{normali a } \Sigma_3=0\ (5);$$

$$\xi\pm\frac{\sqrt{\rho+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1}\ \eta=\rho,\ \zeta=0;\ \xi\pm\frac{\sqrt{\rho-a}}{\sqrt{2a}}\ \zeta=\rho,\ \eta=0\ \text{ normali a } S_1=0\,,$$

$$\xi\pm\frac{\sqrt{\sigma+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1}\ \eta=\sigma,\ \zeta=0;\ \xi\pm\frac{\sqrt{a-\sigma}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1}\ \zeta=\sigma,\ \eta=0\ \text{ normali a } S_2=0\,,\quad \text{e}$$

$$\xi\pm\frac{\sqrt{\tau-a}}{\sqrt{2a}}\ \eta=-\tau,\ \zeta=0;\ \xi\pm\frac{\sqrt{\tau+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1}\ \zeta=-\tau,\ \eta=0\ \text{ normali a } S_3=0\quad (5').$$

Laonde per le espressioni (2) (3) (4) (5) o (2') (3') (4') (5'), notando come ognuna

delle superficie $\sum$ od S sia rappresentata col porre il suo parametro eguale ad una costante, si hanno i seguenti Teoremi :

*Teorema* 1° (1. 3. 10 di *Heilermann*) Si considerino le due linee di curvatura che si incrociono in un punto qualunque M di una superficie di secondo grado dotata di centro ($\sum$), ed avendo condotto ad esse nel punto comune i loro piani normali, si determinino i segmenti da questi intercettati sovra ogni asse della superficie allora :

1° i punti equidistanti dal centro e che dividono ogni segmento in rapporto armonico sono costanti, qualunque sia M.

2° essi coincidono coi punti ove le normali alla superficie ($\sum$) negli ombilici corrispondenti (reali od immaginari) vanno ad incontrare gli assi.

*Teorema* 2° Si considerino le due linee di curvatura che s'incrociano in un punto qualunque M di una superficie di secondo grado priva di centro (S), ed avendo condotto ad esse nel punto comune i loro piani normali si determini il segmento da questi intercettato sovra l'asse della superficie, allora: 1° il punto che divide il segmento in parti eguali è costante, qualunque sia M', 2° esso coincide col punto ove le normali alla superficie negli ombilici tagliano l'asse della superficie.

2.

Disegnando col nome di *punti focali* tali punti fissi, se per la normale condotta in un punto qualunque M ad una superficie $\sum$ e per ciascuno dei due punti focali giacenti sovra un asse si conducono due piani, questi formano coi piani delle sezioni normali principali in M o piani normali alle linee di curvatura di $\sum$ incrociantisi in M un fascio armonico. Similmente se per la normale in un punto qualunque M ad una superficie S si conducono due piani, uno pel punto focale, l'altro parallelamente all'asse, questi formano sui piani normali alle linee di curvatura di S che s' incrociano in M un fascio armonico. Inoltre i piani delle sezioni normali principali essendo ortogonali essi bissecano gli angoli chiusi dagli altri due piani del fascio.

2° Le sfere che hanno il centro in un punto focale e per raggio la porzione della normale condotta alla superficie [($\sum$) o (S)] nell'ombilico corrispondente compresa fra questa ed il punto focale , chiamansi *sfere focali ,* le quali si dicono poi *conjugate* quando hanno per centri i punti focali di ($\sum$) o (S) posti sopra un medesimo asse. Se da un punto qualunque della superficie si conduce una tangente ad una delle sue sfere focali, la porzione di questa compresa fra il punto della superficie ed il punto di tangenza chiamasi *raggio focale.*

3.

Le coppie delle sfere focali conjugate per le superficie $\sum$, e le uniche sfere fo-

cali per le superficie S sono date dalle equazioni :

$$(\xi-\rho)^2+\eta^2+\zeta^2=4(\rho^2-a^2) \qquad \text{per } S_1=0,$$

$$(\xi-\sigma)^2+\eta^2+\zeta^2=4(\sigma^2-a^2) \quad (7') \quad \text{per } S_2=0,$$

$$(\xi+\tau)^2+\eta^2+\zeta^2=4(\tau^2-a^2) \quad (8') \quad \text{per } S_3=0,$$

ed

$$\left(\xi\mp\frac{bc}{\lambda}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}{\lambda^2};$$

$$\xi^2+\left(\eta\mp\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}\sqrt{-1}\right)^2+\zeta^2=\frac{\lambda^2(\lambda^2-c^2)}{(\lambda^2-b^2)};$$

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta\mp\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\right)^2=\frac{\lambda^2(\lambda^2-b^2)}{(\lambda^2-c^2)} \quad (6) \quad \text{per } \Sigma_1=0$$

$$\left(\xi\mp\frac{bc}{\mu}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=-\cdot\frac{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}{\mu^2};$$

$$\xi^2+\left(\eta\mp\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\sqrt{-1}\right)^2+\zeta^2=-\cdot\frac{\mu^2(c^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)};$$

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta\mp\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{c^2-\mu^2}}\sqrt{-1}\right)^2=-\cdot\frac{\mu^2(\mu^2-b^2)}{(c^2-\mu^2)} \quad (7) \text{ per } \Sigma_2=0$$

$$\left(\xi\mp\frac{bc}{\nu}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{\nu^2};$$

$$\xi^2+\left(\eta\mp\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{\nu^2(c^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)};$$

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta\mp\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\sqrt{-1}\right)^2=\frac{\nu^2(b^2-\nu^2)}{c^2-\nu^2} \quad (8) \quad \text{per } \Sigma_3=0\,.$$

Ed i raggi focali condotti da un punto qualunque di una superficie alle sue sfere focali sono in coordinate ellittiche :

$$\psi_1^2=(\mu\mp\nu)^2\,;\ \psi_2^2=[\sqrt{\mu^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{-1}]^2,$$

$$\psi_3^2=-[\sqrt{c^2-\mu^2}\mp\sqrt{c^2-\nu^2}]^2 \quad \text{per } \Sigma_1\ ;$$

$$\varphi_1^2=(\lambda\mp\nu)^2,\ \varphi_2^2=[\sqrt{\lambda^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{-1}]^2,$$

$$\varphi_3^2=[\sqrt{\lambda^2-c^2}\mp\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{-1}]^2 \quad \text{per } \Sigma_2\ ;$$

$$\chi_1^2 = (\lambda \mp \mu)^2 \,, \quad \chi_2^2 = [\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{\mu^2 - b^2}]^2 \,,$$

$$\chi_3^2 = [\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{-1}]^2 \quad \text{per } \textstyle\sum_3 = 0 \qquad (9)$$

nelle quali deve prendersi il segno — per la prima sfera focale ed il segno + per la rimanente : e da

$$\omega_1 = \tau + \sigma \text{ per } S_1 \,, \quad \omega_2 = \tau + \rho \text{ per } S_2 \,, \quad \omega_3 = \sigma - \rho \text{ per } S_3 \qquad (9').$$

Chiamati *piani direttori* i piani polari d'un punto focale appartenente ad una delle tre superficie $\sum$ od S relativamente alle due rimanenti, avremo :

$$\xi = \pm \frac{\mu^2}{x_1}, \; \eta = \pm \frac{(\mu^2 - b^2)}{y_1}, \; \zeta = \pm \frac{(c^2 - \mu^2)}{z_1} \;; \quad \xi = \pm \frac{\nu^2}{x_1}, \; \eta = \mp \frac{(b^2 - \nu^2)}{y_1},$$

$$\zeta = \pm \frac{(c^2 - \nu^2)}{z_1} \quad \text{pei punti focali di } \textstyle\sum_1 \text{ relativamente a } \sum_2 \;; \text{ a } \sum_3$$

$$\xi = \pm \frac{\lambda^2}{x_2}, \; \eta = \pm \frac{(\lambda^2 - b^2)}{y_2}, \; \zeta = \pm \frac{(\lambda^2 - c^2)}{z_2} \;; \quad \xi = \pm \frac{\nu^2}{x_2}, \; \eta = \mp \frac{(b^2 - \nu^2)}{y_2},$$

$$\zeta = \mp \frac{(c^2 - \nu^2)}{z_1} \quad \text{pei punti focali di } \textstyle\sum_2 \text{ relativamente a } \sum_1 \;; \text{ a } \sum_3$$

$$\xi = \pm \frac{\lambda^2}{x_3}, \; \eta = \pm \frac{\lambda^2 - b^2}{y_3}, \; \zeta = \pm \frac{(\lambda^2 - c^2)}{z_3} \;; \quad \xi = \pm \frac{\mu^2}{x_3}, \; \eta = \pm \frac{\mu^2 - b^2}{y_3},$$

$$\zeta = \mp \frac{c^2 - \mu^2}{z_3} \quad \text{pei punti focali di } \textstyle\sum_3 \text{ relativamente a } \sum_1 \;; \text{ a } \sum_2$$

$\xi = -(\rho + 2\sigma)$ ; $\xi = (2\sigma - \rho)$ pel punto focale di $S_1$ rispetto a $S_2$ ; a $S_3$ ,

$\xi = -(\sigma + 2\rho)$ ; $\xi = (2\tau - \sigma)$ pel punto focale di $S_2$ rispetto a $S_1$ ; a $S_3$ e

$\xi = -(2\rho - \tau)$ ; $\xi = -(2\sigma - \tau)$ pel punto focale di $S_3$ rispetto a $S_1$ ; a $S_2$ .

Ora le distanze di un punto qualunque $M(xyz)$ di una delle superficie $\sum$ od S ai suoi piani direttori espresse in coordinate ellittiche sono :

$$p_1^2 = \frac{\mu^2}{x_1^2}\psi_1^2 \,, \; p_2^2 = \frac{\nu^2}{x_1^2}\psi_1^2 \;; \; q_1^2 = \frac{\mu^2 - b^2}{y_1^2}\psi_2^2 \,, \; q_2^2 = \frac{\nu^2 - b^2}{y_1^2}\psi_2^2 \;;$$

$$r_1^2 = \frac{\mu^2 - c^2}{z_1^2}\psi_3^2 \,, \; r_2^2 = \frac{\nu^2 - c^2}{z_1^2}\psi_3^2 \quad \text{per un punto di } \textstyle\sum_1 \quad (10) \,;$$

$$p'^2_1 = \frac{\lambda^2}{x_2^2}\varphi_1^2 \,, \; p'^2_2 = \frac{\nu^2}{x_2^2}\varphi_1^2 \;; \; q'^2_1 = \frac{\lambda^2 - b^2}{y_2^2}\varphi_2^2 \,, \; q'^2_2 = \frac{\nu^2 - b^2}{y_2^2}\varphi_2^2 \;;$$

$$r'^2_1 = \frac{\lambda^2 - c^2}{z_2^2}\varphi_3^2 \,, \; r'^2_2 = \frac{\nu^2 - c^2}{z_2^2}\varphi_3^2 \quad \text{per un punto di } \textstyle\sum_2 \quad (11) \,;$$

$$p''^2_1=\frac{\lambda^2}{x_3^2}\chi_1^2,\ p''^2_2=\frac{\mu^2}{x_3^2}\chi_1^2;\ q''^2_2=\frac{\lambda^2-b^2}{y_3^2}\chi_2^2,\ q''^2_2=\frac{\mu^2-b^2}{y_3^2}\chi_2^2;$$

$$r''^2_1=\frac{\lambda^2-c^2}{z_3^2}\chi_3^2,\ r''^2_2=\frac{\mu^2-c^2}{z_3^2}\ \text{per un punto di } \textstyle\sum_3 \quad (12):$$

$$\varpi_1=\omega_1,\ \varpi'_1=-\omega_1 \text{ per un punto di } S_1,$$

$$\varpi_2=\omega_2,\ \varpi'_2=-\omega_2 \text{ per un punto di } S_2,$$

$$\varpi_3=\omega_3,\ \varpi'_3=-\omega_3 \text{ per un punto di } S_3 \quad (10').$$

4.

Dalle espressioni (10) (11) (12) (11') si ricavano i rapporti

$$\frac{p_1^2}{p_2^2}=\frac{\mu^2}{\nu^2},\ \frac{p'^2_1}{p'^2_2}=\frac{\lambda^2}{\nu^2},\ \frac{p''^2_1}{p''^2_2}=\frac{\lambda^2}{\mu^2};\quad \frac{q_1^2}{q_2^2}=\frac{\mu^2-b^2}{\nu^2-b^2},\ \frac{q'^2_1}{q'^2_2}=\frac{\lambda^2-b^2}{\nu^2-b^2},\ \frac{q''^2_1}{q''^2_2}=\frac{\lambda^2-b^2}{\mu^2-b^2};$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{\mu^2-c^2}{\nu^2-c^2},\ \frac{r'^2_1}{r'^2_2}=\frac{\lambda^2-c^2}{\nu^2-c^2},\ \frac{r''^2_1}{r''^2_2}=\frac{\lambda^2-c^2}{\mu^2-c^2};\quad \frac{\varpi_1}{\varpi'_1}=-1,\ \frac{\varpi_2}{\varpi'_2}=-1,\ \frac{\varpi_3}{\varpi'_3}=1,$$

donde derivano i seguenti Teoremi.

*Teorema* 3º Considerando il punto focale (reale od immaginario) F appartenente ad una superficie di secondo grado dotata di centro ($\sum_1$) ed i suoi piani direttori $D_1$ $D_2$, cioè i piani polari di F relativamente alle superficie ($\sum_2$) ($\sum_3$), il rapporto delle distanze di un punto qualunque M di ($\sum_1$) intersezione di ($\sum_1$) ($\sum_2$) ($\sum_3$) dai piani $D_1$, $D_2$ eguaglia quello sussistente fra gli assi di ($\sum_2$) e di ($\sum_3$) su cui giace F.

*Corollario.* Per le relazioni

$$\frac{p_1^2\,p'^2_2\,p''^2_1}{p_2^2\,p'^2_1\,p''^2_2}=\frac{\mu^2\nu^2\lambda^2}{\nu^2\lambda^2\mu^2}=1,\quad \frac{q_1^2\,q'^2_2\,q''^2_1}{q_2^2\,q'^2_1\,q''^2_2}=1, \text{ ec.}$$

abbiamo pure: Si considerino le tre superficie ortogonali ($\sum_1$) ($\sum_2$) ($\sum_3$) che determinano un punto qualunque M, e sieno $F_1$, $F_2$, $F_3$ i punti focali di esse giacenti sovra gli assi delle medesime coincidenti in direzione, sieno $D'_2$ $D'_3$ i piani direttori di $F_1$; $D_1^{(2)}$ $D_3^{(2)}$ i piani direttori di $F_2$, e $D_1^{(3)}$ $D_{(2)}^{(3)}$ i piani direttori di $F_3$, il prodotto delle distanze di M dai tre piani $D'_2$, $D_3^{(2)}$, $D_1^{(3)}$ eguaglia quello delle distanze di M dai tre rimanenti $D'_3$ $D_1^{(2)}$ $D_{(2)}^{(3)}$.

*Teorema* 4º Considerando il punto focale $f_1$ di una superficie di secondo grado priva di centro (S), ed i suoi piani direttori $d_1$ $d_2$, le distanze di un punto qualunque di (S) da essi sono eguali e contrarie in direzione.

5.

Divisa la distanza di due punti focali conjugati $F_1$, $F_2$ di una delle superficie $(\sum)$, $(\sum_1)$ per l'asse su cui essi giacciono appartenente però ad una delle due rimanenti superficie ortogonali $(\sum_2)$, il rapporto così ottenuto chiamasi eccentricità della linea di curvatura determinata da $(\sum_2)$ sovra $(\sum_1)$ relativamente ai punti focali considerati $F_1$, $F_2$. Ora dalle espressioni (10) (11) (12), e per l'equazioni in coordinate ellittiche di una linea di curvatura si deduce il:

*Teorema* 5º Per ogni punto M di una linea di curvatura di una delle superficie $\sum$ $(\sum_1)$ determinata su questa da una delle due rimanenti, $(\sum_2)$, il raggio focale condotto ad una delle due sfere focali conjugate (centri $F_1$, $F_2$) diviso per la distanza del punto M dal piano direttore, piano polare del centro della sfera considerata relativamente a $(\sum_2)$ dà un quoziente costante ed eguale alla eccentricità della linea di curvatura relativamente ai punti focali $F_1$, $F_2$. Questo Teorema comprende il 7º di *Heillermann.*

Per le superficie (S) a causa delle relazioni $(10')$ sussiste pure il seguente:

*Teorema* 6º Per ogni punto M di una linea di curvatura di una delle superficie $S$ $(S_1)$, determinata su questa da una delle due rimanenti $(S_2)$, il raggio focale condotto alla sfera focale diviso per la distanza del punto M dal piano direttore dà per quoziente l'unità.

6.

I raggi focali condotti da un punto qualunque di una superficie $\sum$ ad ogni coppia di sfere focali conjugate hanno i valori:

$$\psi'_1 = \mu - \nu\,,\ \psi''_1 = \mu + \nu\,,\ \psi'_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1}\,,$$
$$\psi''_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1}\,,\ \psi'_3 = \left[\sqrt{c^2 - \nu^2} - \sqrt{c^2 - \mu^2}\right]\sqrt{-1}\,,$$
$$\psi''_3 = \left[\sqrt{c^2 - \nu^2} + \sqrt{c^2 - \mu^2}\right]\sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \textstyle\sum_1\,;$$

$$\varphi'_1 = \lambda - \nu\,,\ \varphi''_1 = \lambda + \nu\,,\ \varphi'_1 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1}\,,$$
$$\varphi''_2 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1}\,,\ \varphi'_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} - \sqrt{c^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1}\,,$$
$$\varphi''_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} + \sqrt{c^2 - \nu^2}\,\sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \textstyle\sum_2\,;$$

$$\chi'_1 = \lambda - \mu\,,\ \chi''_1 = \lambda + \mu\,,\ \chi'_2 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} - \sqrt{\mu^2 - b^2}\,,$$
$$\chi''_2 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} + \sqrt{\mu^2 - b^2}\,,\ \chi'_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} - \sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{-1}\,,$$
$$\chi''_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} + \sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \textstyle\sum_3 \qquad (13).$$

Questi unitamente alle equazioni delle linee di curvatura conducano al seguente:

*Teorema* 7º Per tutti i punti di una linea di curvatura di una superficie di secondo grado dotata di centro $\sum$, e secondo che essa è determinata dall'una o dall' altra delle superficie ortogonali e di specie diversa la somma o la differenza dei raggi focali condotti a due sfere focali conjugate è costante ed eguaglia l' asse ( reale od immaginario) della superficie che determina la linea di curvatura asse che contiene i centri delle due sfere focali considerate. Questo comprende il Teorema 8º di *Heilermann*.

Prendendo il prodotto dei raggi delle tre coppie di sfere conjugate appartenenti ad una superficie $\sum$ si ottiene il seguente:

*Teorema* 8º Il prodotto dei raggi delle tre coppie di sfere focali conjugate relative ad una superficie $\sum$ eguaglia il prodotto dei suoi tre semi-assi.

7.

Le tangenti condotte in M($x\,y\,z$) punto d'intersezione delle tre superficie ortogonali $\sum$ alle tre linee di curvatura che in esso s'incrociano hanno per equazioni :

$$\xi = -\frac{\sqrt{c^2-b^2}\;\lambda\mu\sqrt{c^2-\nu^2}}{b\nu\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\,\zeta + \frac{c\lambda\mu}{b\nu}\,,$$

$$\eta = \frac{c\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{b\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}\,\zeta - \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-\nu^2}}\,,$$ $T_{12}$ tangente alla linea di curvatura $\sum_1 = 0$ $\sum_2 = 0$ ;

$$\xi = -\frac{\sqrt{c^2-b^2}\;\lambda\nu\sqrt{c^2-\mu^2}}{b\mu\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,\zeta + \frac{c\lambda\nu}{b\mu}\,,$$

$$\eta = \frac{c\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{b\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}\,\zeta + \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{\mu^2-b^2}}\,,$$ $T_{13}$ tangente alla linea di curvatura $\sum_1 = 0$ $\sum_3 = 0$ ;

$$\xi = -\frac{\sqrt{c^2-b^2}\;\mu\nu\sqrt{\lambda^2-c^2}}{b\lambda\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,\zeta + \frac{c\mu\nu}{b\lambda}\,,$$

$$\eta = \frac{c\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,\zeta + \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{\lambda^2-b^2}}\,,$$ $T_{23}$ tangente alla linea di curvatura $\sum_2 = 0$ $\sum_3 = 0$.

Designando ora con $\Delta_1\,\Delta'_1$ i semi-diametri di $\sum_1$ paralleli alle tangenti $T_{12}$, $T_{13}$, con $\Delta_2\,\Delta'_2$ i semi-diametri $\sum_2$ paralleli alle tangenti $T_{12}$ $T_{23}$ con $\Delta_3\,\Delta'_3$ i semi-diametri di $\sum_3$ paralleli a $T_{13}$ $T_{23}$ abbiamo

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2-\nu^2}\,,\ \Delta'_1=\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,;\quad \Delta_2=\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,,\ \Delta'_2=\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{-1}\,;$$

$$\Delta_3=\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{-1}\,,\ \Delta'_3=\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\sqrt{-1} \qquad (14) \text{ e per le } (13);$$

$$\Delta_1^2 = \varphi'_1\varphi''_1=\varphi'_2\varphi''_2=\varphi'_3\varphi''_3=\left(\frac{\Delta'_3}{\sqrt{-1}}\right)^2,\quad \Delta_2^2=\left(\frac{\Delta_3}{\sqrt{-1}}\right)^2=\psi'_1\psi''_1=\psi'_2\psi''_2=\psi'_3\psi''_3,$$

$$\Delta_2'^2=\left(\frac{\Delta'_2}{\sqrt{-1}}\right)^2=\chi'_1\chi''_1=\chi'_2\chi''_2=\chi'_3\chi''_3 \qquad (15)\,;$$

dalle quali si deduce il seguente:

*Teorema* 9° Consideriamo la tangente $(T_{12})$ condotta in un punto qualunque M ad una linea di curvatura di una delle superficie $\sum$ $(\sum_1)$ determinatavi da una delle due rimanenti, $(\sum_2)$, i raggi focali ad una coppia qualunque di sfere focali conjugate di quest'ultima superficie $(\sum_2)$ danno un prodotto eguale al quadrato del semi-diametro della prima superficie $(\sum_1)$, (diviso per $(\sqrt{-1})^2$ se immaginario) parallelo alla tangente considerata $T_{12}$.

## 8.

Considerando il punto qualunque M intersezione delle tre superficie S ed i piani tangenti a ciascuna di queste, le perpendicolari abbassate dall'origine delle coordinate su di loro hanno in coordinate ellittiche le espressioni:

$$\beta_1=\frac{\sqrt{\rho^2-a^2}}{2\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_1\,,$$

$$\beta_2=\frac{\sqrt{a^2-\sigma^2}}{2\sqrt{\sigma+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_2\,,$$

$$\beta_3=\frac{\sqrt{\tau^2-a^2}}{2\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau+\sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_3 \qquad (11').$$

Inoltre avremo ancora:

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{\rho-\sigma}}\,,\ \gamma_2=\frac{\sqrt{\rho-\sigma}\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}{\sqrt{\rho+\tau}} \text{ normali abbassate dai punti focali di}$$

$S_2$, $S_3$ sul piano tangente a $S_1$,

$$\gamma'_1=\frac{\sqrt{\tau+\sigma}\sqrt{a^2-\sigma^2}}{\sqrt{\rho-\sigma}}\,,\ \gamma'_2=\frac{\sqrt{\rho-\sigma}\sqrt{a^2-\sigma^2}}{\sqrt{\tau+\sigma}} \text{ normali abbassate dai punti focali di}$$

$S_1$, $S_3$ sul piano tangente a $S_2$,

$$\gamma_1'' = \frac{\sqrt{\tau+\sigma}\sqrt{\tau^2-a^2}}{\sqrt{\rho+\tau}}, \quad \gamma_2'' = \frac{\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau^2-a^2}}{\sqrt{\tau+\sigma}}$$ normali abbassate dai punti focali di $S_1$ e di $S_2$ sul piano tangente a $S_3$ (12′).

Per le (11′), le (9′) e l'equazioni in coordinate ellittiche delle linee di curvatura delle superficie S, si ha il seguente Teorema:

*Teorema* 10.° Se si prende per origine il punto di mezzo della distanza che separa i fochi delle sezioni principali nelle superficie S, considerando una linea di curvatura di $S_1$ determinatavi da $S_2$, la perpendicolare abbassata dall'origine sul piano tangente a $S_1$ in un punto qualunque di essa M moltiplicata per la radice quadrata del raggio focale di M relativo alla sfera focale di $S_2$ dà un prodotto costante, qualunque sia M. - Questo è analogo al bel Teorema di *Joachimsthal* sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado dotate di centro. Per le (12′) si ha ancora

*Teorema* 11.° Considerando una linea di curvatura di $S_1$ determinatavi da $S_2$, la perpendicolare abbassata dal punto focale $F_2$ di $S_2$ sul piano tangente a $S_1$ in un punto qualunque M di essa divisa per la radice quadrata del raggio focale di M relativo alla sfera focale di $S_2$ è costante qualunque sia M.

*Teorema* 12.° Considerando il piano tangente in un punto qualunque M di una delle superficie S, ($S_3$) le perpendicolari abbassate su questo dai punti focali delle due rimanenti superficie ($S_1$) ($S_2$) che passano per M danno un prodotto costante.

9.

Considerando il punto qualunque M intersezione delle tre superficie $\sum$ ed i piani tangenti a ciascuna di queste le perpendicolari abbassate dal centro comune su di loro hanno in coordinate ellittiche le espressioni :

$$P_1 = \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}}$$ normale abbassata dal centro sul piano tangente a $\sum_1$,

$$P_2 = \frac{\sqrt{\mu^2(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$ normale abbassata dal centro sul piano tangente a $\sum_2$,

$$P_3 = \frac{\sqrt{\nu^2(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}}$$ normale abbassata dal centro sul piano tangente a $\sum_3$ (16).

Inoltre avremo :

$$\delta_{11}=\frac{(\lambda\mp\nu)}{\lambda}P_1,\quad \varepsilon_{11}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}P_1,\quad \eta_{11}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-c^2}\mp\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{\lambda^2-c^2}};$$

$$\delta_{21}=\frac{(\lambda\mp\mu)}{\lambda}P_1,\quad \varepsilon_{21}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-b^2}\mp\sqrt{\mu^2-b^2}\right]}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}P_1,\quad \eta_{21}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-c^2}\mp\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}P_1$$

per le normali abbassate dai punti focali di $\sum_2$ di $\sum_3$ sul piano tangente a $\sum_1$;

$$\delta_{12}=\frac{(\mu\mp\nu)}{\mu}P_2,\quad \varepsilon_{12}=\frac{\left[\sqrt{\mu^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{\mu^2-b^2}}P_2,\quad \eta_{12}=\frac{\left[\sqrt{c^2-\nu^2}\pm\sqrt{c^2-\mu^2}\right]}{\sqrt{c^2-\mu^2}}P_2;$$

$$\delta_{22}=\frac{(\lambda\mp\mu)}{\mu}P_2,\quad \varepsilon_{22}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-b^2}\mp\sqrt{\mu^2-b^2}\right]}{\sqrt{\mu^2-b^2}}P_2,\quad \eta_{22}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-c^2}\mp\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{-1}}P_2$$

per le normali abbassate dai punti focali di $\sum_1$, $\sum_3$ sul piano tangente a $\sum_2$;

$$\delta_{13}=\frac{(\mu\mp\nu)}{\nu}P_3,\quad \varepsilon_{13}=\frac{\left[\sqrt{\mu^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}}P_3,\quad \eta_{13}=\frac{\left[\sqrt{c^2-\nu^2}\pm\sqrt{c^2-\mu^2}\right]}{\sqrt{c^2-\mu^2}}P_3;$$

$$\delta_{23}=\frac{(\lambda\mp\nu)}{\nu}P_3,\quad \varepsilon_{23}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-b^2}\mp\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{-1}}P_3,\quad \eta_{23}=\frac{\left[\sqrt{\lambda^2-c^2}\mp\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{-1}\right]}{\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{-1}}P_3$$

normali abbassate dei punti focali di $\sum_1$, $\sum_2$ sul piano tangente a $\sum_3$ (17).

Per le equazioni (15) (16) e per quelle relative alle linee di curvatura si ha il seguente teorema:

*Teorema* 13.° Considerando una linea di curvatura di $\sum_1$ determinatavi da $\sum_2$, la perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente a $\sum_1$ in un punto qualunque M di essa moltiplicata per la radice quadrata del prodotto dei raggi focali relativi ad una coppia di sfere focali conjugate di $\sum_2$ è costante qualunque sia M. — Questo è il Teorema di *Joachimsthal* enunciato in un nuovo modo. Quindi dalle relazioni (17) si deducono parimenti i seguenti teoremi:

*Teorema* 14.° Considerando una linea di curvatura di $\sum_1$ determinatavi da $\sum_2$ ed il piano tangente a $\sum_1$ in un punto qualunque della medesima M, il rapporto delle perpendicolari abbassate su di questo da una coppia di punti focali conjugati della superficie $\sum_2$ eguaglia il rapporto sussistente frai raggi focali condotti da M alla coppia delle sfere focali conjugate di $\sum_2$ che hanno i punti focali considerati per centri.

*Teorema* 15.° Considerando una linea di curvatura di $\sum_1$ determinatavi da $\sum_2$ ed il piano tangente a $\sum_1$ in un punto qualunque della medesima, M, il prodotto delle perpendicolari abbassate su di queste da una coppia di punti focali conjugati di $\sum_2$ è costante, qualunque M.

10.

Dalle espressioni (17') si ottiene

$$\delta'_{11} + \delta''_{11} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{11} = \eta'_{11} + \eta''_{11} = \delta'_{21} + \delta''_{21} = \varepsilon'_{21} + \varepsilon''_{21} = \eta'_{21} + \eta''_{21} = 2P_1 ,$$

$$\delta'_{12} + \delta''_{12} = \varepsilon'_{12} + \varepsilon''_{12} = \eta'_{12} + \eta''_{12} = \delta'_{22} + \delta''_{22} = \text{ec.} = 2P_2 ,$$

$$\delta'_{13} + \delta''_{13} = \varepsilon'_{13} + \varepsilon''_{13} = \eta'_{13} + \eta''_{13} = \delta'_{23} + \delta''_{23} = \text{ec.} = 2P_2 ,$$

e perciò

$$\frac{\sqrt{\delta'_{11}\,\delta''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_1\,\varphi''_1}} = \frac{\frac{1}{2}(\delta'_{11} + \delta''_{11})}{\frac{1}{2}(\varphi'_1 + \varphi''_{41})},\ \frac{\sqrt{\varepsilon'_{11}\,\varepsilon''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_2\,\varphi''_2}} = \frac{\frac{1}{2}(\varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{12})}{\frac{1}{2}(\varphi'_2 + \varphi''_2)},\ \frac{\sqrt{\eta'_{11}\,\eta''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_3\,\varphi''_3}} = \frac{\frac{1}{2}(\eta'_{11} + \eta''_{11})}{\frac{1}{2}(\varphi'_3 + \varphi''_3)} \text{ ec. :}$$

donde

*Teorema* 16º Considerando una linea di curvatura di $\sum_1$ determinatavi da $\sum_2$ ed il piano tangente a $\sum_1$ in un punto qualunque M della medesima, se su di questo si abbassano le perpendicolari da una coppia di punti focali conjugati di $\sum_2$, $F'_2$, $F''_2$ e se da M si conducono i raggi focali alla coppia di sfere focali conjugate di $\sum_2$ aventi per centri $F'_2$ $F''_2$, le medie aritmetiche dei raggi focali e delle perpendicolari saranno proporzionali alle medie geometriche di queste medesime linee.

Se in un punto qualunque M intersezione delle superficie $\sum$ od S si conducono le normali a ciascuna di queste, le porzioni delle medesime comprese fra il punto M ed i punti ove tagliano i piani principali delle superficie a cui appartengono sono espresse in coordinate ellittiche da:

$$N_{11} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - b^2)}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\,, \quad N_{21} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - c^2)}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\,,$$

$$N_{31} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}$$ per la normale a $\sum_1$ rispetto ai piani

$$\zeta = 0\,;\ \eta = 0\,;\ \xi = 0$$

$$N_{12} = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - b^2)}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,, \quad N_{22} = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - c^2)}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2},$$

$$N_{32} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}$$ per la normale a $\sum_2$ rispetto ai piani

$$\zeta = 0\,;\ \eta = 0\,;\ \xi = 0$$

*

$$N_{31}=\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\nu^2(\nu^2-b^2)}}\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\,,\quad N_{32}=\frac{\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\nu^2(c^2-\nu^2)}}\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\,,$$

$$N_{33}=\frac{\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}$$ per la normale a $S_3$ rispetto ai piani $\zeta=0\,;\ \eta=0\,;\ \xi=0$:

$$n_{11}=\frac{2\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}\sqrt{\rho-a}}{\sqrt{\rho+a}}\,,\quad n_{21}=\frac{2\sqrt{\rho+a}}{\sqrt{\rho-a}}\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}\ ;$$

$$n_{12}=\frac{2\sqrt{a-\sigma}}{\sqrt{a+\sigma}}\sqrt{\sigma+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}\,,\quad n_{22}=\frac{2\sqrt{a+\sigma}}{\sqrt{a-\sigma}}\sqrt{\sigma+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}\ ;$$

$$n_{13}=\frac{2\sqrt{\tau+a}}{\sqrt{\tau-a}}\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau+\sigma}\,,\quad n_{23}=\frac{2\sqrt{\tau-a}}{\sqrt{\tau+a}}\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau+\sigma}$$

per le normali alle superficie $S_1$, $S_2$, $S_3$ rispetto ai piani $\zeta=0$, $\eta=0$. Laonde si ha:

*Teorema* 17.° Se in un punto qualunque M della linea di curvatura appartenente alla superficie $(\Sigma_1)$ determinatavi da $(\Sigma_2)$ si conduca una normale a $\Sigma_2$ la porzione di questa compresa fra il punto M ed il punto ove taglia uno dei piani principali della superficie $\Sigma_2$ divisa per la radice quadrata del prodotto dei raggi focali condotti da M ad una delle coppie delle sfere focali conjugate di $\Sigma_2$ è costante qualunque sia M.

*Teorema* 18.° Se in un punto qualunque M della linea di curvatura appartenente alla superficie $(S_1)$ determinatavi da $(S_2)$ si conduce una normale a $(S_2)$ la porzione di questa compresa fra il punto M ed il punto ove taglia uno dei piani principali della superficie $S_2$ divisa per la radice quadrata del raggio focale condotto da M alla sfera focale di $S_2$ è costante.

Posto

$$R_{11}=\frac{\sqrt{(\lambda^2-b^2)}\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}{\lambda}\,,\quad R_{21}=\frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2-c^2)}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}\,,\quad R_{31}=\frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}$$

raggi delle sfere (6) focali di $\Sigma_1$,

$$R_{12}=\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{\mu}\,,\quad R_{22}=\frac{\sqrt{\mu^2(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\,,\quad R_{32}=\frac{\sqrt{\mu^2(\mu^2-b^2)}}{\sqrt{c^2-\mu^2}}\,,$$

i quali moltiplicati per $\sqrt{-1}$ danno i raggi delle sfere focali di $\Sigma_2$,

$$R_{13} = \frac{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\nu}\ ,\quad R_{23} = \frac{\sqrt{\nu^2(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\ ,\quad R_{33} = \frac{\sqrt{\nu^2(b^2-\nu^2)}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\ ,$$

raggi delle sfere focali di $\sum_3$, ed

$$r_1 = 2\sqrt{\rho^2-a^2}\ ,\quad r_2 = 2\sqrt{a^2-\sigma^2}\ ,\quad r_3 = 2\sqrt{\tau^2-a^2}\ ,\quad r_1\ ,\ r_2\sqrt{-1}\ ,\ r_3$$

raggi focali delle sfere focali di $S_1$, $S_2$, $S_3$; abbiamo le relazioni :

$$\frac{R_{31}N_{11}}{R_{32}N_{12}} = \frac{\sqrt{\varphi'_3\ \varphi''_3}}{\sqrt{\psi'_3\ \psi''_3}}\ ,\quad \frac{R_{21}N_{21}}{R_{22}N_{22}} = \frac{\sqrt{\varphi'_2\ \varphi''_2}}{\sqrt{\psi'_2\ \psi''_2}}\ ,\quad \frac{N_{31}R_{11}}{N_{32}R_{12}} = \frac{\sqrt{\varphi'_1\ \varphi''_1}}{\sqrt{\psi'_1\ \psi''_1}}\ \text{ec.}$$

$$\frac{n_{11}\ r_1}{n_{12}\ r_2} = \frac{\rho - a}{a - \sigma}\cdot\frac{\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1}}\ ,\quad \text{ec.}$$

dalle quali si ricaverebbero nuovi Teoremi.



# MÉMOIRE

## SUR LA FIGURE DE LA TERRE CONSIDÉREÉ COMME PEU DIFFERENTE D'UNE SPHÈRE

PAR M. OSSIAN BONNET

répetiteur à l'Ecole Polytechnique de Paris.



On sait que Laplace après avoir démontré dans le livre III de la Mécanique Céleste que la terre dans le cas où on la suppose primitivement fluide, peut avoir pour figure celle d'un ellipsoide de révolution aplati par les pôles, s'est ensuite proposé en ne faisant que l'hypothèse d'une figure très-peu différente de la sphère, d'établir directement certaines relations qui permettent de comparer les resultats de la théorie avec ceux de l'observation.

L'analyse que l'illustre géomètre a employée pour cet objet est très-remarquable, mais elle n'est pas exempte de quelques difficultés; j'ai remarqué qu'en s'aidant des découvertes qui ont été faites depuis sur la théorie des surfaces, il était possible de parvenir aux résultats de Laplace d'une manière beaucoup plus simple. C'est ce que je me propose de faire voir dans ce mémoire.

1. Soit une sphère $s_1$ dont nous prendrons le rayon pour unité. Rapportons cette sphère à trois axes rectangulaires ayant leur origine au centre $o$, et appellons $x_1$, $y_1$, $z_1$ les cordonnées d'un quelconque $m_1$ de ses points. Soit, en second lieu, une surface $s$ peu différente de la sphère $s_1$ et que nous regarderons comme la surface de la terre, rapportons la aux mêmes axes de cordonnées, et désignons par $x$, $y$, $z$ les cordonnées du point $m$ de cette surface qui est situé sur le rayon passant par le point $m_1$ de la sphère. Nous pourrons poser

$$(1) \qquad x = x_1(1 + \alpha u)$$

$$(2) \qquad y = y_1(1 + \alpha u)$$

$$(3) \qquad z = z_1(1 + \alpha u),$$

$\alpha$ étant un nombre positif assez petit pour que l'on puisse regarder comme nulles ses puissances supérieures à la première, et $u$ représentant une certaine fonction, toujours finie, des deux variables indépendantes qui fixent la position du point $m_1$ de la sphère. Ces deux variables dont $u$ est supposé fonction pourraient être choisies d'une infinité de manières; nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ce sont les deux angles du système de cordonnées polaires; c'est à dire l'angle $\theta$ positif et moindre que $\pi$ que forme $om$ avec $oz$, et l'angle $\varphi$ positif et pouvant varier de $o$ à $2\pi$

que forme le plan $zom_1$ avec le plan $zox$. Il faudra dès lors se rappeler que

(4) $$x_1 = \sin\theta\cos\varphi\,,\qquad y_1 = \sin\theta\cos\varphi\,,\qquad z_1 = \cos\theta\,;$$

et en remplaçant dans les équations (1), (2), (3), $x_1\ y_1\ z_1$ par ces valeurs, on aura les trois cordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de la surface considérée en fontion des deux variables indépendantes $\theta$ et $\varphi$.

Faisons la somme des carrés des équations (1), (2), (3), on trouve

(5) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u$$

en remarquant que $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ et négligeant le terme $\alpha^2 u^2$ qui contient le carré de $\alpha$. Si dans cette équation on substitue aux angles $\theta$ et $\varphi$ qui entrent dans $u$ les valeurs déduites des deux premières des équations (4), après avoir remplacé dans ces équations $x_1$ par $x$, $y_1$ par $y$, ce que l'on a droit de faire puisque l'altération qui en résulte pour $\theta$ en $\varphi$ est de l'ordre $\alpha$ par suite l'altération de $2\alpha u$ de l'ordre $\alpha^2$, les dérivées partielles $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$ étant supposées toujours finies de même que la fonction $u$, nous aurons l'équation en coordonnées rectangulaires de la surface $s$.

Nous considérerons pour définir la surface $s$, tantôt les équations (1), (2), (3), et alors $u$ sera une certaine fonction de $\theta$ et $\varphi$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$ devront être remplacées par leurs valeurs déduites des équations (4), tantôt l'équation (5), et alors $u$ sera une fonction de $x$ et de $y$ obtenue en remplaçant dans la première valeur de $u$, les angles $\theta$ et $\varphi$ par les valeurs qu'on déduit des deux premières des équations (4) après qu'on a remplacé dans ces équations $x_1$ par $x$ et $y_1$ par $y$.

2. Différentions les équations (1), (2), (3), il viendra

$$dx = dx_1(1 + \alpha u) + \alpha x_1 du\,,$$
$$dy = dy_1(1 + \alpha u) + \alpha y_1 du\,,$$
$$dz = dz_1(1 + \alpha u) + \alpha z_1 du\,;$$

ajoutant après avoir élevé au carré, et remarquant que

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1\,,\qquad x_1dx_1 + y_1dy_1 + z_1dz_1 = 0\,,$$

on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dz_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2)(1 + \alpha u)^2 + \alpha^2 du^2\,,$$

ou bien, en négligeant les termes en $\alpha^2$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2)(1 + 2\alpha u).$$

Mais $dx^2 + dy^2 + dz^2$ est égal au carré de l'élément linéaire de la surface $s$, $dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$ au carré de l'élément linéaire de la surface $s_1$, donc en appelant $ds$ et $ds_1$ ces deux element on a

$$ds^2 = ds_1^2\,(1 + 2\alpha u),$$

et par suite

$$ds = ds_1\,(1 + 2\alpha u)^{\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$(6) \qquad ds = ds_1\,(1 + \alpha u)$$

en négligeant les termes qui contiennent $\alpha^2$ en facteur.

On sait que $ds_1$ s'exprime très-simplement en fonction de $\theta$ et de $\varphi$ et que l'on a

$$ds_1^2 = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2;$$

on conclut de là

$$(7) \qquad ds^2 = (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)(1 + 2\alpha u)\ ,$$

ce qui fait connaître la carré de l'élément linéaire de la surface $s$, en fonction de $\theta$ et $\varphi$. Cette valeur nous sera utile dans la suite.

3. Comme dans l'expression de $ds^2$, en $\theta$ et $\varphi$, il n'entre pas de terme contenant le rectangle $d\theta\, d\varphi$, on peut conclure, comme l'on sait, que les courbes tracées sur la surface $s$ et représentées respectivement par les équations

$$\varphi = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \theta = \text{const.}$$

forment deux systèmes de lignes orthogonales, on voit même en mettant la valeur de $ds^2$ sous la forme

$$ds^2 = (1 + 2\alpha u)\,\text{sen}^2\theta.\left[\,d\varphi^2 + (d\log.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\theta)^2\right]$$

que les courbes peuvent diviser la surface $s$ en carrés infiniment petits, en les espaçant convenablement.

4. Au moyen de la formule (7), nous pouvons calculer facilement les courbures géodésiques des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ de la surface, et reconnaître si les courbes $\varphi = \text{const.}$ sont des lignes géodésiques, et si les courbes $\theta = \text{const.}$ ont en chaque point même courbure géodésique, comme cela a lieu sur la sphère $s_1$. En effet, d'après une formule de notre Mémoire sur la théorie générale des surfaces qui fait partie du XXXII:me Cahier du Journal de l'École Polytechnique, on a

$$\frac{1}{\rho_s} = -\frac{\delta ds}{ds\,\delta\sigma}\ ;$$

$\dfrac{1}{\rho_s}$ représentant la courbure géodésique d'une courbe quelconque, $ds$ l'élément de cette courbe $\delta\,ds$ la variation de cet élément pour un déplacement infiniment petit effectué sur la surface et normalement à cet élément, enfin $\delta\sigma$ étant l'élément linéaire correspondant au déplacement normal. Or si nous considérons d'abord la courbe $\varphi = \text{const.}$, nous aurons

$$ds^2 = (1 + 2\alpha u)d\theta^2\ ,$$

d'où

$$ds\,\delta\,ds = \alpha\frac{du}{d\varphi}d\varphi\,d\theta^2\,,$$

puis

$$\delta\sigma = (1+\alpha u)\sin\theta\,d\varphi\,;$$

par conséquent la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_\varphi}$ sera

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{\alpha\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta(1+\alpha u)(1+2\alpha u)}\,,$$

ou en négligeant les termes qui contiennent $\alpha^2$ en facteur,

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{\alpha\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}\,.$$

Considérons, en second lieu, la courbe $\theta = \text{const}$. On a

$$ds^2 = (1+2\alpha u)\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

d'où

$$ds\,\delta\,ds = \left[\alpha\frac{du}{d\theta}\sin^2\theta + (1+2\alpha u)\sin\theta\cos\theta\right]d\theta\,d\varphi^2\,,$$

puis

$$\delta\sigma = (1+\alpha u)d\theta;$$

par conséquent la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_\theta}$ sera

$$(9)\qquad \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\alpha\frac{du}{d\theta}\sin^2\theta + (1+2\alpha u)\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\alpha u)(1+2\alpha u)}$$

et en négligeant les termes en $\alpha^2$,

$$\frac{1}{\rho_\theta} = \cot\theta - \alpha\left(u\cot\theta - \frac{du}{d\theta}\right);$$

nous donnons ici le signe $+$ au second membre, pour une raison qui se trouve indiquée dans le mémoire cité et sur laquelle il est inutile d'insister.

5. Cherchons maintenant l'équation en $\theta$ et $\varphi$ des méridiens et des parallèles. — Si la terre était sphérique les méridiens seraient les lignes représentées par l'équation $\varphi = \text{const}$ et les parallèles les lignes ayant pour équation $\theta = \text{const}$. Mais il n'en est pas de même dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, comme nous allons le

faire voir. Remarquons d'abord que par méridien on doit entendre ici le lieu des points de la surface de la terre pour lesquels le zénith se trouve sur un même méridien céleste, ou en d'autres termes la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface de la terre et dont les génératrices sont perpendiculaires à un plan passant par l'axe des $z$; quant aux parallèles ce sont évidemment les lieux des points pour lesquels la latitude est la même, en appelant, bien entendu, latitude le complément de l'angle que la normale à la surface forme avec l'axe des pôles ou l'axe des $z$. Ceci posé, cherchons d'abord l'équation des méridiens. L'équation en coordonnées rectangulaires de la surface de la terre, est comme on l'a vu plus haut

$$x^2+y^2+z^2=1+2\alpha u,$$

$u$ étant considéré comme fonction de $x$ et de $y$. De là on tire pour l'équation du plan tangent au point $x$, $y$, $z$,

$$(\mathrm{X}-x)\left(x-\alpha\frac{du}{dx}\right)+(\mathrm{Y}-y)\left(y-\alpha\frac{du}{dy}\right)+(\mathrm{Z}-z)z=0$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes. La trace de ce plan sur le plan des $xy$ est

$$(\mathrm{X}-x)\left(x-\alpha\frac{du}{dx}\right)+(\mathrm{Y}-y)\left(y-\alpha\frac{du}{dy}\right)-z^2=0.$$

Or, pour que le plan soit perpendiculaire au plan passant par l'axe des $z$ qui fait l'angle $l$ avec le plan $zox$, il faut et il suffit que sa trace sur le plan des $xy$ soit perpendiculaire à la trace sur le même plan des $xy$ du plan passant per l'axe des $z$, trace dont l'équation est

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}\operatorname{tg}l;$$

on a donc

$$(10)\qquad y-\alpha\frac{du}{dy}-\operatorname{tang}l\left(x-\alpha\frac{du}{dx}\right)=0.$$

Telle est l'équation du méridien correspondant à la longitude $l$, en coordonnées rectangulaires. Mais il faut avoir cette équation en $\theta$ et $\varphi$. Pour cela je remarque que

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx},\qquad \frac{du}{dy}=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Or, puisque $x$ et $y$ remplacent $x_1$ et $y_1$ dans $u$, on a

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=\sin\theta\sin\varphi;$$

donc

$$1=\cos\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{dx}-\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx},\quad 0=\cos\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{dx}+\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx},$$

$$0=\cos\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{dy}-\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dy},\quad 1=\cos\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{dy}+\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dy}.$$

De là on tire

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta},\quad \frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\quad \frac{d\theta}{dy}=\frac{\sin\varphi}{\cos\theta},\quad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

et par conséquent

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\theta}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}-\frac{du}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\quad \frac{du}{dy}=\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}+\frac{du}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}.$$

Mettant dans l'équation (10) à la place de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ ces valeurs, et à la place de $x$ et $y$ les valeurs $(1-\alpha u)\sin\theta\cos\varphi$, $(1+\alpha u)\sin\theta\sin\varphi$, il vient

$$(1+\alpha u)\sin\theta\sin(\varphi-l)=\alpha\left[\frac{\frac{du}{d\theta}}{\cos\theta}\sin(\varphi-l)+\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}\cos(\varphi-l)\right]$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\varphi-l)=\frac{\alpha\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta\left[(1+\alpha u)\sin\theta-\alpha\frac{\frac{du}{d\theta}}{\cos\theta}\right]},$$

et en négligeant les puissances de $\alpha$ supérieures à la première

$$\operatorname{tang}(\varphi-l)=\frac{\alpha\frac{du}{d\varphi}}{\sin^2\theta},$$

ou mieux encore, $\varphi-l$ étant du même ordre que $\alpha$,

$$(11)\qquad \varphi-l=\alpha\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin^2\theta}.$$

C'est là en fonction de $\theta$ et de $\varphi$ l'équation d'un méridien quelconque. Dans cette équation $l$ est une constante qui représente la longitude comptée à partir du plan $zox$.

Cherchons maintenant la latitude d'un point quelconque de la surface $s$, en fonction des deux mêmes variables $\theta$ et $\varphi$. Le cosinus de l'angle de la normale à la surface $s$ au point $x$, $y$, $z$ avec l'axe des pôles ou des $z$ est d'abord en coordonnées rectangulaires

$$\frac{z}{\sqrt{\left(x-\alpha\frac{du}{dx}\right)^2+\left(y-\alpha\frac{du}{dy}\right)^2+z^2}},$$

ou, en négligeant le carré de $\alpha$ sous le radical et remarquant que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u\,,$$

il vient

$$\frac{z}{\sqrt{1 - 2\alpha\left(x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} - u\right)}}\,.$$

Substituant aux coordonnées $x$, $y$, $z$ et aux dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ leurs valeurs en fonction de $\theta$ et de $\varphi$, on a

$$\frac{(1 + \alpha u)\cos\theta}{\sqrt{1 + 2\alpha\left(\frac{du}{d\theta}\operatorname{tang}\theta - u\right)}}$$

et, en négligeant les puissances de $\alpha$ supérieures à la première

$$\cos\theta + \alpha\frac{du}{d\theta}\sin\theta\,.$$

Ainsi $\lambda$ étant la latitude, on a

$$\sin\lambda = \cos\theta + \alpha\frac{du}{d\theta}\sin\theta\,\cdot$$

Cette égalité montre que $\frac{\pi}{2} = \lambda$ et $\theta$ diffèrent d'une quantité qui est de l'ordre de $\alpha$ et dont on peut par conséquent négliger les puissances supérieures à la première. Cela posé remplaçant dans le premier membre de l'équation supérieure $\lambda$ par

$$\frac{\pi}{2} - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda - \theta\right)$$

et développant par la série de Taylor suivant les puissances de $\frac{\pi}{2} - \lambda - \theta$, on trouve

$$(12) \qquad \frac{\pi}{2} - \lambda - \theta = -\alpha\frac{du}{d\theta}\,\cdot$$

Telle est l'équation très-simple qui représente en $\theta$ et $\varphi$ le parallèle correspondant à la latitude $\lambda$.

6. On peut arriver aux équations (11) et (12) d'une manière beaucoup plus simple en n'employant que des considérations géométriques.

Soit $m$ un point quelconque de la terre et $m$X, $m$Y (*) les courbes $\varphi =$ const. $\varphi =$ const. qui passent par ce point de telle sorte que $m$X soit l'intersection de la

(*) Le lecteur est prie de tracer lui même la figure.

terre avec le cône engendré par la rotation de $om$ autour de $oz$. Soit en outre, $m_1$ le point situé sur $om$ et appartenant à la sphère $s_1$ dont la surface de la terre diffère très-peu, et $m_1 X_1$, $m_1 Y_1$ les courbes analogues à $mX$ et $mY$ sur cette sphère. Menons la verticale $mN$ du point $m$, c'est-à-dire la normale à la terre en ce point, et cherchons d'abord l'angle de cette ligne avec $oz$. L'angle de la normale $mN$ avec le plan $zom$ est de l'ordre $\alpha$, on peut donc substituer à l'angle cherché l'angle que fait $oz$ avec la projection $mN'$ de $mN$ sur le plan $zom$, car la différence de ces angles est de l'ordre du carré de l'angle de $mN$ avec le plan $zom$ ou de l'ordre $\alpha^2$. Or l'angle de $oz$ avec $omN'$ est égal à l'angle de $oz$ avec $om$ ou $\theta$ plus l'angle de $om$ avec $mN'$; d'ailleurs ce dernier angle est égal à l'angle formé par la tangente à la courbe $mX$ au point $m$ avec la tangente à la courbe $m_1 X_1$ au point $m_1$. Reste donc à trouver cet angle : Soient $mt$ et $m_1 t_1$ les deux tangentes dont il s'agit, prenons sur ces tangentes deux points $p$ et $p_1$ situés en ligne droite avec le point $o$ et très-rapprochés respectivement de $m$ et de $m_1$ de manière que $p$ puisse être considéré comme appartenant à la courbe $mX_1$ et $p_1$ comme appartenant à la courbe $m_1 X_1$; $m_1 t_1$ étant perpendiculaire à $om$ on aura en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2$,

$$\text{angl}(mt\,,\ m_1 t_1) = \frac{mm_1 - pp_1}{m_1 p_1};$$

mais

$$mm_1 = \alpha u\,,\quad pp_1 = \alpha\left(u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right),\quad m_1 p_1 = \mathrm{d}\theta\,,$$

donc l'angle cherché est

$$-\,\alpha\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\,,$$

donc l'angle de la normale $mN$ avec l'axe des pôles ou le complément de la latitude est donné par la formule

$$\frac{\pi}{2} - \lambda = \theta - \alpha\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

comme nous l'avions obtenu plus haut.

Cherchons maintenant la longitude. Considérons par le point $m$, en même temps que la normale $mN$ à la terre et la tangente $mt$ à la courbe $mX$, la tangente $ms$ à la courbe $mY$. Adjoignons de même à la normale $om_1$ de la sphère de $s_1$ et à la tangente $m_1 t_1$ à la courbe $mX$, la tangente $m_1 s_1$ à la courbe $m_1 Y_1$. Ces trois dernières droites formeront une système de trois axes rectangulaires, de même les angles $Nmt$, $Nms$ seront droits, mais le troisième $tms$ des angles formés par les trois droites $mN$, $mt$, $ms$ ne sera pas droit.

Appelons maintenant $a$, $b$, $c$ les cosinus des angles de $m$N avec les trois axes $m_1 t_1$, $m_1 s_1$, $om_1$; $a'$, $b'$, $c'$ les cosinus des angles analogues relatifs à $mt$; $a''$, $b''$, $c''$ le cosinus des angles analogues relatifs à $ms$. On aura:

$$aa' + bb' + cc' = 0 , \qquad aa'' + bb'' + cc'' = 0;$$

ou bien en remarquant que $c = a' = b'' = 1$, aux quantités près de l'ordre $\alpha^2$, et que les six autres cosinus sont des quantités de l'ordre $\alpha$,

$$a + c' = 0 , \qquad b + c'' = 0 ;$$

mais $c'$, c'est-à-dire le cosinus de l'angle de $mt$ avec $om$ est connu et égal à $\alpha \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$, comme on l'a vu plus haut; $c''$, c'est-à-dire le cosinus de $ms$ avec $om$ peut également être déterminé simplement, et l'on trouve $\frac{\alpha \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}}{\sin\theta}$, donc

$$a = -\alpha \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} , \qquad b = -\alpha \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}}{\sin\theta} .$$

Ceci posé, soit un plan quelconque passant par $oz$ et faisant un angle $l$ avec le plan $zox$. Menons par le point $m_1$ une droite $m_1 h$ perpendiculaire à ce plan, l'angle de $m_1 h$ avec $m_1 s_1$ sera égal évidemment à $\varphi - l$, l'angle de cette même ligne avec $m_1 t_1$ peut aussi très-facilement être calculé, car le trièdre formé par $m_1 h_1$, $m_1 s_1$, $m_1 t_1$ donne

$$\cos hm_1 t_1 = \sin hm_1 s_1 \cos(hm_1 s_1 , t_1 m_1 s_1) = \sin(\varphi - l)\cos\theta;$$

de là on tire pour le cosinus de $m_1 h$ avec $om$

$$\cos hm_1 m = \sin(\varphi - l)\sin\theta$$

en se rappelant que le carré de ce cosinus ajouté aux carrés des cosinus des angles de $m_1 h$ avec $m_1 s_1$ et $m_1 t_1$ doit faire 1. Pour exprimer maintenant que le point $m$ a pour longitude $l$, il faut écrire que la normale $m$N est perpendiculaire à $m_1 h$, c'est-à-dire que la somme des produits des cosinus des angles que ces deux droites forment avec les trois axes rectangulaires $m_1 t_1$, $m_1 s_1$, $om_1$ est égale à 0; il vient ainsi

$$\sin(\varphi - l)\sin\theta - a\sin(\varphi - l)\cos\theta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} - \alpha\cos(\varphi - l)\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}}{\sin\theta} = 0 ,$$

ou bien en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2$

$$\varphi - l = \frac{\alpha \frac{du}{d\varphi}}{\sin^2 \theta}$$

comme on l'a déja trouvé.

7. Il est utile de connaître aussi en fonction de $\theta$ et $\varphi$ la valeur de l'azimuth pour les différents points d'une ligne tracée sur la terre. Définissons d'abord nettement ce que l'on appelle azimuth. Or par azimuth correspondant à un élément d'une ligne tracée sur la terre, on doit entendre évidemment l'angle que fait cet élément avec le plan du méridien céleste qui passe par l'une de ses extrémités, c'est-à-dire avec le plan conduit par la normale à la surface à cette extrémité, et parallèlement à la ligne des pôles. Cela posé, soit $mm'$ l'élément de la ligne considérée, $m$N la normale à la terre, $mv$ le parallèle à la ligne des pôles mené par le point $m$, enfin $mm''$ le premier élément de la trace du plan $om$N sur la surface de la terre; l'azimuth cherché sera l'angle $m'mm''$. Pour le trouver soit encore $mm'''$ l'élément issu de $m$, de la courbe $\varphi =$ const. qui passe par ce point, ou ce qui revient au même, de la trace du plan $omv$ sur la terre; le trièdre formé par $mv$, $mm'$, $mm''$ qui est rectangle suivant $mm''$, donne

$$\sin m''mm''' = \sin(m'''mv\ ,\ m''mv) \sin m'''mv.$$

Or l'angle $(m'''mv,\ m''mv)$ est égal à l'angle $\varphi - l$ ($l$ étant comme précédemment la longitude du point $m$), $m'''mv$ peut être remplacé, d'abord par $m''mv$ aux quantités près de l'ordre $\alpha^2$, puis par $\frac{\pi}{2} + \theta$ aux quantités près de l'ordre $\alpha$, donc

$$\sin m''mm''' = (\varphi - l) \cos \theta\,,$$

ou plus simplement

$$m''mm''' = (\varphi - l) \cos \theta$$

aux quantités près de l'ordre $\alpha^2$, puisque $\varphi - l$ est de l'ordre de $\alpha$. Maintenant, l'azimuth $m'mm''$ se compose de l'angle $m'mm'''$ que l'élément $mm'$ fait avec l'élément $mm''$ de la courbe $\varphi =$ const. plus de l'angle $m''mm'''$; ainsi, appelant $\zeta$ l'azimuth, $i$ l'angle de la courbe considérée avec la courbe $\varphi =$ const, on a

$$\zeta = i + (\varphi - l) \cos \theta\,;$$

ou en remplaçant $(\varphi - l)$, par sa valeur obtenue précédemment,

$$\zeta = i + \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{du}{d\varphi}. \tag{13}$$

Cette relation contient encore l'angle $i$ d'inconnu; mais on sait que rien n'est plus facile que de trouver cet angle quand on connait l'équation de la courbe, aux éléments de laquelle cet angle correspond. En effet, on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin\theta\, d\varphi}{d\theta},$$

et si

$$f(\theta, \varphi) = 0$$

est l'équation de la courbe, on trouve

$$\operatorname{tang} i = = \frac{\frac{df}{d\theta}\sin\theta}{\frac{df}{d\varphi}}.$$

8. La formule (13) nous sera très-utile dans la suite. Montrons immédiatement comment on peut s'en servir pour trouver la ligne en tous les points de laquelle l'azimuth est nul, ligne qu'il ne faudrait par confondre avec le méridien. On a ici $\zeta = 0$, donc

$$i = -\alpha \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi}$$

ou bien, en négligeant des quantités de l'ordre $\alpha^3$,

$$\operatorname{tang} i = -\alpha \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi};$$

mais

$$\operatorname{tang} i = \sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad \text{donc} \quad d\varphi = -\alpha \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{du}{d\varphi} d\theta.$$

Telle est l'équation différentielle de la ligne cherchée. On peut ramener, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'intégration de cette équation aux quadratures; en effet l'équation même montre que les variations de $\varphi$ sont de l'ordre de $\alpha$, on peut donc négliger ces variations dans $\frac{du}{d\varphi}$ qui est multiplié par $\alpha$ et regarder cette fonction comme ne contenant que $\theta$ de variable, on a alors

$$\varphi - \varphi_0 = -\alpha \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{du}{d\varphi} d\theta,$$

$\theta_0$, $\varphi_0$ étant les valeurs initiales de $\theta$ et $\varphi$. Si la différénce $\theta - \theta_0$ est assez petite pour qu'on puisse regarder comme nul le produit de son carré par $\alpha$, on trouvera en développant le second membre, par la série de Taylor, suivant les puissances de $\theta - \theta_0$,

$$\varphi - \varphi_0 = -\alpha(\theta - \theta_0) \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0$$

$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0$ étant la valeur de $\frac{du}{d\varphi}$ pour $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$.

9. Arrêtons nous un instant à déduire, des équations des méridiens et des parallèles obtenues au n.° (5), plusieurs propriétés qui sans avoir leur application en géodésie, présentent néanmoins quelque intéret au point de vue de la géométrie.

Prenons l'équation

$$\varphi - \alpha \frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin^2\theta} = l$$

d'un méridien quelconque, dans la quelle $l$ est une constante représentant la longitude. En la différentiant nous trouvons

$$d\varphi - \alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\varphi\, d\theta}}{\sin^2\theta} - r\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right)d\theta - \alpha\,\frac{\frac{d^2u}{d\varphi^2}}{\sin^2\theta}\,d\varphi = 0,$$

et en négligeant les termes en $\alpha^2$,

$$(14) \qquad d\varphi - \alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin^2\theta} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right)d\theta = 0.$$

Soit $i$ l'angle variable que le méridien fait avec les courbes $\varphi = \text{const}$, on sait que

$$\text{tang}\, i = \frac{\sin\theta\, d\varphi}{d\theta}.$$

Le rapport différentiel $\frac{d\varphi}{d\theta}$ se rapportant au méridien, donc en substituant à ce rapport la valeur que l'on déduit de l'équation (14) il viendra

$$\text{tang}\, i = \alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right).$$

Cette équation montre que tang $i$ et parsuite $i$ sont de l'ordre de $\alpha$, on peut donc avec l'approximation à laquelle nous nous soumettons remplaçer tang $i$ par $i$, on trouve ainsi plus simplement

$$(15) \qquad i = \alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right).$$

Prenons, en second lieu, l'équation d'un parallèle

$$\theta - \alpha\,\frac{du}{d\theta} = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

où $\lambda$ est une constante représentant la latitude. En différentiant, il vient

$$d\theta - \alpha \frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} d\varphi - \alpha \frac{d^2u}{d\theta^2} d\theta = 0,$$

et en négligeant les termes en $\alpha^3$,

$$(16) \qquad d\theta - \alpha \frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} d\varphi = 0.$$

Soit $i'_1$ l'angle variable que le parallèle forme avec les courbes $\theta =$ const., on aura

$$\tang i'_1 = \frac{d\theta}{\sin\theta\, d\varphi},$$

le rapport différentiel se rapportant an parallèle considéré, donc en substituant à ce rapport la valeur que l'on déduit de l'équation (16), il viendra

$$\tang i'_1 = \alpha \frac{\dfrac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta},$$

ou bien en remplaçant $\tang i'_1$ par $i'_1$, qui n'en diffère que d'une quantité de l'ordre $\alpha^3$,

$$i'_1 = \alpha \frac{\dfrac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta}.$$

Si on appelle $i_1$ l'angle variable du parallèle avec les courbes $\varphi =$ const., il est clair que

$$i_1 + i'_1 = \frac{\pi}{2},$$

on a donc encore

$$(17) \qquad i_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \frac{\dfrac{d^3u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta}.$$

Les angles que les méridiens et les parallèles forment avec les courbes $\varphi =$ const. étant connus, on en déduit en prenant la différence, la valeur de l'angle sous le quel les méridiens et les parallèles se coupent entr'eux, on trouve ainsi en appelant $\omega$ cet angle,

$$(18) \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \left( \frac{\dfrac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{du}{d\varphi} \right).$$

La fonction

$$\alpha \left( \frac{\dfrac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{du}{d\varphi} \right)$$

dont dépend l'angle $\omega$ et que l'on peut mettre sous la forme plus simple

$$\alpha\frac{\mathrm{d}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}}{\mathrm{d}\theta}$$

est très-importante, nous la retrouverons plusieurs fois dans la suite quand nous nous occuperons des lignes géodésiques. On peut remarquer que l'équation (18) revient à

$$(19)\qquad \alpha\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)=\alpha\frac{\mathrm{d}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}\cos\omega$$

en négligeant toujours, $\alpha^2$. Ainsi la fonction

$$\alpha\frac{\mathrm{d}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}}{\mathrm{d}\theta}$$

est la moitié du cosinus de l'angle sous lequel se coupent le méridien et le parallèle passant au point $(\theta,\ \varphi)$. (*Sarà continuato*).

## SUR L'ABAISSEMENT DE L'ÉQUATION MODULAIRE DU HUITIÈME DEGRÉ. (*)

. . . . . . . J'ai entrepris le calcul de la réduction de l'équation modulaire de huitième degré au septième, et voici le résultat définitif auquel je viens d'être amené. Soit fait, en introduisant la variable $\omega$ (**), $u=\varphi(\omega)$, les huit racines $v$ seront: $\varphi(7\omega)$, et $\varphi\left(\dfrac{\omega+16m}{7}\right)$ le nombre entier $m$ étant pris suivant le module 7. Or en prenant en premier lieu:

$$z=\left[\varphi(7\omega)-\varphi\left(\frac{\omega}{7}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.3}{7}\right)\right]$$
$$\left[\varphi\left(\frac{\omega+16.2}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.6}{7}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16.4}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.5}{7}\right)\right]$$

et en second lieu:

$$z'=\left[\varphi(7\omega)-\varphi\left(\frac{\omega}{7}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.5}{7}\right)\right]$$
$$\left[\varphi\left(\frac{\omega+16.2}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.3}{7}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16.4}{7}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16.6}{7}\right)\right]$$

(*) Da una lettera del Sig. Hermite al Prof. Brioschi.

(**) Vedi « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. T. 46, pag. 510. B.

je trouve que $z$ dépend de cette équation du septième degré, savoir :

$$z^7 - 4^2.7^2.\sqrt{-7}.\,\alpha k k'^4.\,z^4 - 4^4.\,7^4(\alpha - 3)k^2k'^8 z + 4^6.7^3\sqrt{-7}.\,kk'^8(1 - k^2 + k^4) = 0$$

$\alpha$ étant $\dfrac{1-\sqrt{-7}}{2}$. Et $z'$ dépend de l'équation toute semblable que l'on en déduit en changeant le signe du radical $\sqrt{-7}$. Le fait analytique essentiel dans cette question, n'est pas tant ce me semble dans l'absence d'un certain nombre de termes de cette équation; ce qui me frappe le plus c'est qu'il se présente deux types d'équations du septième degré résolubles par les fonctions elliptiques, et je vais essayer de vous faire voir jusqu'à quel point on doit les considérer comme distincts. Pour cela je vais définir avec précision quelles sont les fonctions *non-symétriques* des racines $z$ ou des racines $z'$ qui s'expriment rationnellement par les coefficients, et vous reconnaitrez que ces fonctions analogues sans doute, ne contiennent par les mêmes permutations des racines. A cet effet, et suivant l'usage je represente par $z_x$, l'indice $x$ étant un nombre éntier pris suivant le module 7, les diverses racines $z$; pour abregér je pose encore:

$$\theta(x) \equiv 2x^2 - x^5 \qquad (\text{mod. } 7).$$

Cela posé, les fonctions non symétriques des racines, et qui s'expriment rationnellement par les coefficients, sont celles qui demeurent invariables par les substitutions:

$$(\text{A}) \qquad z_x, \quad z_{ax+b}, \quad z_{a\theta(x+b)+c},$$

$a$ étant un résidu quadratique de 7, $b$ et $c$ deux entiers quelconques. Les formules (A) représentant ainsi $3.7 + 3.7^2 = 168$ substitutions différentes, formant suivant l'expression de M.r Cauchy un système de substitutions conjuguées. Or en passant à l'équation en $z'$, il faut remplacer la fonction $\theta(x)$ par celle-ci :

$$\theta'(x) \equiv -2x^2 - x^6 \qquad (\text{mod. } 7)$$

ce qui conduit à un second système de 168 substitutiones conjuguées, savoir :

$$(\text{A}') \qquad z'_x, \quad z'_{xa+b}, \quad z'_{a\theta'(x+b)c}$$

et il s'en suit qu'il existe non seulement un type, comme l'avait dit M.r Kronecker (*), mais deux types de fonctions de sept lettres possédant trente valeurs distinctes. Rien de plus facile d'ailleurs à démontrer que (A) et (A') sont des systèmes de substitutiones conjuguées; cela resulte des congruences suivantes, où $a$ est tonjours supposé résidu quadratique de 7, savoir :

(*) Monatsbericht der Akademie zu Berlin. April 1858. La funzione del Sig. Kronecker rimane invariabile per le sostituzioni del sistema (A'). B.

$$\theta(ax) \equiv a^2\theta(x)\,, \qquad \theta[m+\theta(x)] \equiv 2m^4\theta\left(\frac{2}{m}+x\right) + \text{Const.}$$

$$\theta'(ax) \equiv a^2\theta'(x), \qquad \theta'[m+\theta'(x)] \equiv 2m^4\theta'\left(\frac{2}{m}+x\right) + \text{Const.}$$

Dans ces congruences les fonctions $\theta(x)$, $\theta'(x)$ entrent comme vous le voyez absolument de la même manière. La théorie de l'équation modulaire du douxième degré, conduit à des résultats analogues que j'espère pouvoir vous communiquer dans une autre occasion. En m'occupant de cette recherche j'ai du encore omployer cette expression analytique des substitutions qui m'a eté fort utile, mais dont je ne sais si on pourra tirer parti en dehors de ces questions. Quoiqu'il en soit voici quelques remarques sur ce sujet. Dans le cas de cinq lettres les 120 substitutions sont ainsi representées :

$$z_x\,, \quad z_{ax+b}\,, \quad z_{(ax+b)^3+c}$$

la valeur $a \equiv 0$ étant exceptée, et les indices étant pris suivant le module 5. (*). Pour sept lettres les 5040 substitutions seront d'une manière analogue :

$$z_x\,, \quad z_{ax+b}\,, \quad z_{a\theta(x+b)c}$$

en attribuant à la fonction $\theta$, ces diverses formes savoir :

$$\theta(x) \equiv -x^6 \pm 2x^2\,, \qquad \theta(x) \equiv 3x \pm x^4,$$

$$\theta(x) \equiv x^5 + ax^3 + 3a^2x \qquad \text{(a quelconque)},$$

$$\theta(x) \equiv x^5 + ax^3 \pm x^2 + 3a^2x \qquad \text{(a non residu de 7)}.$$

Quant à ce qui se rapporte à un nombre premier quelconque de lettres, j'ai bien quelques types généraux de formules de substitutions, mais d'autres questions m'empèchent de suivre ces recherches etc. . . . . .

Paris 17. xbre 58.

---

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

## DEI CRITERI PER DISTINGUERE I MASSIMI DAI MINIMI VALORI DI UNA FUNZIONE.

**RICHELOT — BEMERKUNGEN ZUR THÉORIE DER MAXIMA UND MINIMA — Altona — 1858.**

È noto che la ricerca dei criterj per distinguere i massimi dai minimi valori di una funzione $\varphi(x_1\,,\ x_2 \ldots x_n)$ equivale a quella di determinare quali condizioni debbono verificarsi perchè una funzione quadratica :

(*) Queste espressioni analitiche delle sostituzioni pel caso di cinque lettere furono già date dal Prof. Betti nel Vol. 2° degli Annali del Prof. Tortolini, pag. 17.

$$U = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s A_{r,s} u_r u_s$$

nella quale le $A_{r,s}$ sono quantità date, e le $u_1$, $u_2 \ldots$ quantità indeterminate, sia sempre positiva o negativa qualunque sieno i valori delle $u_1$, $u_2 \ldots$ Supponiamo che le variabili $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ non siano fra loro indipendenti, ma legate da $m$ equazioni, le indeterminate $u_1$, $u_2 \ldots$ risulteranno pure legate da $m$ equazioni lineari:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots + a_{1n} u_n = 0 \\ a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + \ldots + a_{2n} u_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} u_1 + a_{m2} u_2 + \ldots + a_{mn} u_n = 0 \end{array} \right.$$

nelle quali le $a_{r,s}$ sono quantità date.

Per ridurre la forma U a contenere soltanto le $n-m$ indeterminate $u_{m+1}$, $u_{m+2} \ldots u_n$ indipendenti, osserviamo che la forma stessa può scriversi:

$$U = \sum_1^m {}_r \sum_1^m {}_s A_{r,s} u_r u_s + \sum_1^m {}_r \sum_{m+1}^n {}_s A_{r,s} u_r u_s + \sum_{m+1}^n {}_r \sum_1^m {}_s A_{r,s} u_r u_s + \sum_{m+1}^n {}_r \sum_{m+1}^n {}_s A_{r,s} u_r u_s.$$

Ora indicando con H il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

e con $H_{r,s}$ il determinante che ottiensi dal superiore sostituendo agli elementi $a_{1r}$, $a_{2r} \ldots a_{mr}$ di una colonna del medesimo, le quantità $a_{1s}$, $a_{2s} \ldots a_{ms}$; dalle equazioni (1) si deducono le:

$$\begin{array}{l} -Hu_1 = H_{1,m+1} u_{m+1} + H_{1,m+2} u_{m+2} + \ldots + H_{1,n} u_n \\ -Hu_2 = H_{2,m+1} u_{m+1} + H_{2,m+2} u_{m+2} + \ldots + H_{2,n} u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -Hu_m = H_{m,m+1} u_{m+1} + H_{m,m+2} u_{m+2} + \ldots + H_{m,n} u_n \end{array}$$

per cui ponendo:

$$C_{r,s} = \sum_1^m {}_h \sum_1^m {}_k A_{h,k} H_{h,r} H_{k,s} \quad , \qquad B_{r,s} = \sum_1^m {}_h A_{h,r} H_{h,s}$$

si ottengono le seguenti relazioni:

$$\sum_1^m{}_r \sum_1^m{}_s A_{r,s}\, u_r\, u_s = \frac{1}{H^2} \sum_{m+1}^n{}_r \sum_{m+1}^n{}_s C_{r,s}\, u_r\, u_s$$

$$\sum_1^m{}_r A_{r,s}\, u_r = -\frac{1}{H} \sum_{m+1}^n{}_r B_{s,r}\, u_r\,, \qquad \sum_1^m{}_s A_{r,s}\, u_s = -\frac{1}{H} \sum_{m+1}^n{}_s B_{r,s}\, u_s$$

e la funzione quadratica U trasformasi nella :

$$(2) \qquad U = \frac{1}{H^2} \sum_{m+1}^n{}_r \sum_{m+1}^n{}_s \alpha_{r,s}\, u_r\, u_s$$

posto per brevità :

$$\alpha_{r,s} = C_{r,s} - H(B_{s,r} + B_{r,s}) + A_{r,s}\, H^2.$$

Supponiamo ora che mediante una sostituzione lineare siasi trasformata la funzione quadratica (2) in un' altra la quale contenga i soli quadrati delle nuove indeterminate; cioè nella :

$$p_{m+1}\, v_{m+1}^2 + p_{m+2}\, v_{m+2}^2 + \ldots + p_n v_n^2\,;$$

è chiaro che i criterj richiesti saranno o l' un sistema o l' altro delle $n - m$ disuguaglianze :

$$(3) \qquad p_{m+1} \gtrless 0 \qquad p_{m+2} \gtrless 0 \;\ldots\; p_n \gtrless 0\,;$$

e che per la proprietà delle forme quadratiche denominata da Sylvester *legge d'inerzia*, soddisfatte le une o le altre di quelle disuguaglianze per una trasformata lo stesso avrà luogo per un'altra qualunque.

È noto che posto :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{m+1,\, m+1} & \alpha_{m+1,\, m+2} & \cdots & \alpha_{m+1,\, n} \\ \alpha_{m+2,\, m+1} & \alpha_{m+2,\, m+2} & \cdots & \alpha_{m+2,\, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,\, m+1} & \alpha_{n,\, m+2} & \cdots & \alpha_{n,\, n} \end{vmatrix}$$

la funzione quadratica (2) si può trasformare nella seguente :

$$\frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m} v_{m+1}^2 + \frac{\Delta_{m+2}}{\Delta_{m+1}} v_{m+2}^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} v_n^2 \quad \text{essendo} \quad \Delta_m = 1,\ \Delta_{m+1} = \alpha_{m+1,\, m+1} \text{ ec. } \ldots$$

I criterj (3) diventano per questa trasformata i seguenti :

$$(4) \begin{cases} \Delta_{m+1} > 0, & \Delta_{m+2} > 0, \quad \Delta_{m+3} > 0 \;\ldots\; \Delta_n > 0 \\ \Delta_{m+1} < 0, & \Delta_{m+2} > 0, \quad \Delta_{m+3} < 0 \;\ldots\; (-1)^{n-m} \Delta_n > 0\,. \end{cases}$$

Ora la espressione $\alpha_{r,s}$ eguaglia il determinante :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & a_{1s} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & a_{2s} \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & a_{ms} \\ a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,m} & A_{1,s} \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} & A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,m} & A_{m,s} \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots & a_{mr} & A_{r,1} & A_{r,2} & \ldots & A_{r,m} & A_{r,s} \end{vmatrix},$$

quindi per un noto teorema nella teorica dei determinanti (*) si avrà:

$$\Delta_n = H^{2(n-m-1)}D$$

posto:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Se da ultimo osserviamo che:

$$\Delta_{n-1} = \frac{d\Delta_n}{d\alpha_{n,n}}, \qquad \Delta_{n-2} = \frac{d\Delta_{n-1}}{d\alpha_{n-1,n-1}} \text{ ec. } \ldots$$

ossia pei valori di $\alpha_{n,n}$; $\alpha_{n-1,n-1} \ldots$:

$$\Delta_{n-1} = \frac{d\Delta_n}{dA_{n,n}}, \qquad \Delta_{n-2} = \frac{d\Delta_{n-1}}{dA_{n-1,n-1}}, \text{ ec. } \ldots$$

si avranno le:

$$\Delta_n = H^{2p} D, \quad \Delta_{n-1} = H^{2p} \frac{dD}{dA_{n,n}}, \qquad \Delta_{n-2} = H^{2p} \frac{d^2D}{dA_{n,n}\, dA_{n-1,n-1}} \ldots$$

essendo $p = n - m - 1$; ed i criterj richiesti saranno formati col determinante D ed $n - m - 1$ determinanti minori principali del medesimo.

Gennajo 1859. PROF. F. BRIOSCHI.

# PUBBLICAZIONI RECENTI

BELLAVITIS GIUSTO.— Nota sulla risoluzione algebrica dell'Equazioni, in 8.° (Est. dal vol. IV Serie III degli atti dell'Istituto Veneto).

———— Nota sui discriminanti, Invarianti e Covarianti (Estr. dal med.).

LAMARLE E. — Théorie géométrique des rayons, et centres des courbure (V. pag. 353, 419, 574, 783 du *Bullettin* de l' Académie Royale de Belgique an. 1857. in 8.° Bruxelles 1858).

E. DE JONQUIERES E. = Essai sur la génération des courbes géometriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième degré (Extrait du tom. XVI. des mémoires présentées par divers savants a l'académie des Sciences in 4.° Paris 1858.

BIENAYMÉ I. J. — Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres Carrès (V. Mémoires par divers savants tom. XV in 4.° Paris 1858.

BOOLE GEORGE — On the Comparison of Transcendents with certain application to the Theory of definte Integrals (From the Philosophical Transactions fer 1858 — Part. III).

(*) Vedi il mio opuscolo: La teorica dei determinanti ec. pag. 100.

# INTORNO ALLE SUPERFICIE DELLA SECONDA CLASSE INSCRITTE IN UNA STESSA SUPERFICIE SVILUPPABILE DELLA QUARTA CLASSE.

## NOTA

DEL SIG. PROF. LUIGI CREMONA.

1.° Le proprietà delle coniche inscritte in uno stesso quadrilatero hanno occupato i più illustri geometri moderni, incominciando da Eulero, e venendo sino a Steiner. Essi ebbero specialmente di mira la ricerca della massima ellisse inscritta, e la distribuzione dei centri delle diverse specie di coniche. Questo problema è stato risoluto con mirabile semplicità ed eleganza da Plücker, nel secondo tomo dei suoi *Analytisch-Geometrische Entwicklungen* (pag. 199 e 211), facendo uso delle coordinate tangenziali (*Linien-Coordinaten*). L'analogo problema, relativo alle coniche circoscritte ad uno stesso quadrigono, è stato trattato e pienamente risoluto in due memorie del professor Trudi (*). La medesima soluzione è enunciata, insieme ad una gran copia di bellissimi teoremi, anche in una recente memoria del Signor Steiner (**).

Se si estendono queste ricerche alla geometria nello spazio, si presentano due quistioni; l'una risguardante le superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe; l'altra che concerne le superficie del second'ordine circoscritte ad una medesima linea a doppia curvatura del quart'ordine. La presente memoria si riferisce alla prima di queste quistioni.

Seguendo l'esempio del Plücker, io farò uso delle coordinate tangenziali (*Plan-Coordinaten*), che sono state introdotte nella geometria analitica a tre dimensioni dal Signor Chasles (***) e dal Plücker medesimo (****).

2.° È noto che la superficie sviluppabile della quarta classe che inviluppa due superficie della seconda classe contiene in generale quattro coniche; e i piani di queste formano un tale tetraedro (*tetraedro polare*), che ciascuna sua faccia è il piano polare del vertice opposto rispetto ad una qualunque delle infinite superficie della seconda classe inscritte nella sviluppabile. Assumo uno de' vertici del tetraedro polare come origine, e gli spigoli in esso concorrenti come assi di ordinarie coordinate rettilinee oblique $x$, $y$, $z$. Sia:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

(*) Memorie della R. Accademia di Napoli, 1857.

(**) Monatsberichte der Berliner Akademie, Juli 1858.

(***) Mémoire sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie.

(****) System der Geometrie des Raumes.

l'equazione di un piano: le quantità $\frac{t}{w}$, $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, si denomineranno *coordinate tangenziali* del piano. - Un punto abbia per coordinate ordinarie $a$, $b$, $c$; se per esso passa un piano qualunque:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

si avrà:

$$ta + ub + vc + w = 0 .$$

Quest'ultima equazione, nella quale si risguardino $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ come le variabili coordinate di un piano, sarà *l'equazione del punto* $(a, b, c)$ in coordinate tangenziali.

Un'equazione qualunque fra le variabili $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$, coordinate di un piano, rappresenterà la superficie inviluppata dal piano variabile. Se l' equazione conterrà tre sole delle quattro quantità $t$, $u$, $v$, $w$ omogeneamente (ovvero se sarà omogenea rispetto a tre funzioni lineari omogenee delle $t$, $u$, $v$, $w$), essa rappresenterà una linea piana. Il sistema di due equazioni rappresenta la sviluppabile circoscritta alle due superficie rappresentate dalle singole equazioni.

Avendo assunto tre delle facce del tetraedro polare come piani coordinati, la quarta faccia determini sugli assi positivi tre segmenti $l$, $m$, $n$; allora le equazioni de'quattro vertici del tetraedro polare saranno:

$$w = 0 , \qquad lt + w = 0 , \qquad mu + w = 0 , \qquad nv + w = 0$$

ovvero più semplicemente:

$$w = 0 , \qquad t + w = 0 , \qquad u + w = 0 , \qquad v + w = 0$$

ove si assumano per variabili $lt$, $mu$, $nv$ in luogo di $t$, $u$, $v$.

3.° Due qualisivogliano fra le quattro coniche determinano le altre due ed anco tutto il sistema di superficie della seconda classe inscritte nella sviluppabile, la quale può risguardarsi come l' inviluppo dei piani tangenti comuni alle due coniche date. Ciò premesso, le equazioni delle quattro coniche saranno, in tutta la loro generalità, esprimibili così:

$$(1) \qquad \begin{array}{lrrrrl} 1^a. & \alpha(t+w)^2 & +\beta(u+w)^2 & +\gamma(v+w)^2 & * & = 0 \\ 2^a. & * & c(u+w)^2 & -b(v+w)^2 & +\alpha w^2 & = 0 \\ 3^a. & -c(t+w)^2 & * & +a(v+w)^2 & +\beta w^2 & = 0 \\ 4^a. & b(t+w)^2 & -a(u+w)^2 & * & +\gamma w^2 & = 0 \end{array}$$

ove $\alpha$, $\beta$, ... siano costanti reali qualsivogliano, legate dalla condizione:

$$(2) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \cdot$$

Se in luogo di due coniche, supponiamo date due superficie qualunque della seconda classe, riferendole al tetraedro polare, le loro equazioni saranno della forma:

$$\lambda(t+w)^2+\mu(u+w)^2+\nu(v+w)^2+\pi w^2=0$$

$$\lambda'(t+w)^2+\mu'(u+w)^2+\nu'(v+w)^2+\pi' w^2=0$$

ed eliminando da queste successivamente $w^2$, $(t+w)^2$, $(u+w)^2$, $(v+w)^2$ si otterranno le (1).

L'equazione del centro di una superficie della seconda classe rappresentata da un'equazione fra le coordinate $t$, $u$, $v$, $w$, si ottiene eguagliandone a zero la derivata rispetto a $w$; quindi se nella equazione della superficie manca il termine contenente $w^2$, il centro sarà a distanza infinita. Se adunque fra due delle (1) si elimina $w^2$, l'equazione risultante:

(3) $$\alpha' t(t+2w)+\beta' u(u+2w)+\gamma' v(v+2w)=0$$

ove:

(4) $$\alpha'=c-b+\alpha\,,\quad \beta'=a-c+\beta\,,\quad \gamma'=b-a+\gamma$$

rappresenterà il paraboloide che fa parte del sistema di superficie inscritte nella sviluppabile.

Onde rappresentare, con tutta la desiderabile simmetria, una qualunque delle superficie inscritte, dalla prima delle equazioni (1) sottraggo la (3) moltiplicata pel parametro indeterminato $i$. Ottiensi così la:

(5) $$At(t+2w)+Bu(u+2w)+Cv(v+2w)+Dw^2=0$$

ove:

$$A=\alpha'(\lambda-i)\,,\qquad B=\beta'(\mu-i)\,,\qquad C=\gamma'(\nu-i),\qquad D=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\lambda=\frac{\alpha}{\alpha'}\qquad \mu=\frac{\beta}{\beta'}\qquad \nu=\frac{\gamma}{\gamma'}\,.$$

L'equazione (5) per $i=0,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \infty$ somministra le (1) e la (3).

4.° Il centro della superficie (5) è:

(6) $$At+Bu+Cv+Dw=0$$

epperò, qualunque sia $i$, questo punto cade nella retta:

(7) $$\alpha(t+w)+\beta(u+w)+\gamma(v+w)=0\,,\qquad \alpha' t+\beta' u+\gamma' v=0.$$

Le coordinate ordinarie del punto (6) sono:

$$\frac{lA}{D},\quad \frac{mB}{D},\quad \frac{nC}{D}$$

dunque, se si indica con $\delta$ la distanza dei centri di due superficie del sistema (5), corrispondenti ai parametri $i$, $j$, avremo

$$\delta^2 = \frac{(i-\gamma)^2 \{ l^2\alpha'^2 + m^2\beta'^2 + n^2\gamma'^2 + 2pmn\beta'\gamma' + 2qnl\alpha'\gamma' + 2rlm\alpha'\beta' \}}{D^2}$$

ove $p$, $q$, $r$ sono i coseni degli angoli fra gli assi; quindi se fissiamo come origine delle distanze da misurarsi sulla retta (7) il punto O corrispondente a $j=0$, cioè il centro della *prima* conica (1), il parametro $i$ relativo ad una superficie qualunque del sistema (5) sarà proporzionale alla distanza del suo centro dalla origine medesima. Riteniamo che i centri delle altre tre coniche (1) siano ordinatamente i punti P, Q, R situati da una stessa banda rispetto al punto O, e assumiamo come positive le distanze da O verso P, Q, R, ed i corrispondenti valori del parametro $i$. Allora avremo :

(8) $$\lambda > 0\,, \qquad \mu > 0\,, \qquad \nu > 0\,, \qquad \lambda < \mu < \nu\,.$$

5. Formo le funzioni dei coefficienti della equazione (5); dai segni delle quali dipende la specie della superficie di seconda classe rappresentata dall'equazione medesima. Quelle funzioni sono :

$$\Phi = ABC(D-A-B-C)$$

$$\Theta_1 = DBC(D-B-C) \qquad \Xi_1 = A(D-A)$$

$$\Theta_2 = DCA(D-C-A) \qquad \Xi_2 = B(D-B)$$

$$\Theta_3 = DAB(D-A-B) \qquad \Xi_3 = C(D-C)$$

e sostituendo per A, B, C, D i loro rispettivi valori (*) :

(9) . . . $$\Phi \equiv i(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha\beta\gamma\,(\lambda-i)(\mu-i)(\nu-i)$$

(10) $$\begin{cases} \Theta_1 \equiv \beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\mu-i)(\nu-i)\{\alpha+i(\beta'+\gamma')\} \\ \Theta_2 \equiv \gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)(\nu-i)(\lambda-i)\{\beta+i(\gamma'+\alpha')\} \\ \Theta_3 \equiv \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda-i)(\mu-i)\{\gamma+i(\alpha'+\beta')\} \end{cases}$$

(11) $$\begin{cases} \Xi_1 \equiv \alpha(\lambda-i)(\beta+\gamma+i\alpha') \\ \Xi_2 \equiv \beta(\mu-i)(\gamma+\alpha+i\beta') \\ \Xi_3 \equiv \gamma(\nu-i)(\alpha+\beta+i\gamma') \end{cases}$$

Posto per brevità :

(12) $$\lambda' = -\frac{\beta+\gamma}{\alpha'} \qquad \mu' = -\frac{\gamma+\alpha}{\beta'} \qquad \nu' = -\frac{\alpha+\beta}{\gamma'}$$

(13) $$\lambda'' = -\frac{\alpha}{\beta'+\gamma'} \qquad \mu'' = -\frac{\beta}{\gamma'+\alpha'} \qquad \nu'' = -\frac{\gamma}{\alpha'+\beta'}$$

le espressioni superiori divengono :

---

(*) Il simbolo $\equiv$ indica l'eguaglianza di segno.

$$(14)\quad\begin{cases}\Theta_1 \equiv \beta\gamma(\beta' + \gamma')(i - \mu)(i - \nu)(i - \lambda'')(\alpha + \beta + \gamma)\\ \Theta_2 \equiv \gamma\alpha(\gamma' + \alpha')(i - \nu)(i - \lambda)(i - \mu'')(\alpha + \beta + \gamma)\\ \Theta_3 \equiv \alpha\beta(\alpha' + \beta')(i - \lambda)(i - \mu)(i - \nu'')(\alpha + \beta + \gamma)\end{cases}$$

$$(15)\quad \Xi_1 \equiv -(i-\lambda)(i-\lambda')\,,\quad \Xi_2 \equiv -(i-\mu)(i-\mu')\,,\quad \Xi_3 \equiv -(i-\nu)(i-\nu').$$

Ciò posto, i criteri per distinguere la specie della superficie rappresentata dalla equazione (5) sono i seguenti (*).

Se $\Phi > 0$ la superficie è o reale e rigata, o imaginaria; ha luogo il primo caso se una qualunque delle sei funzioni $\Theta$, $\Xi$ è negativa. Nel secondo caso le sei funzioni sono tutte positive.

Se $\Phi < 0$ la superficie è reale e non rigata : e propriamente è un ellissoide se le funzioni $\Theta$ sono tutte positive, e le $\Xi$ tutte negative; invece se un $\Theta$ è negativo, ovvero se un $\Xi$ è positivo la superficie è un iperboloide a due falde.

Se $\Phi = 0$ l'equazione (5) rappresenta una conica. Questa è iperbole se le funzioni $\Theta$ sono negative; ellisse se le funzioni $\Theta$ sono positive, e le $\Xi$ negative; imaginaria se le funzioni $\Theta$ e $\Xi$ sono tutte positive.

Le anzidette condizioni non sono però tutte indipendenti fra loro : su di ciò basta osservare quanto segue :

Affinchè la superficie sia ideale basta che si abbia $\Phi > 0$; e che un $\Theta$ e un $\Xi$ d'indice diverso siano positivi; allora tutte le sei funzioni $\Theta$ e $\Xi$ sono positive.

Affinchè la superficie sia un ellissoide basta che sia $\Phi < 0$ , uno dei $\Theta$ positivo, e un $\Xi$ d'indice diverso negativo, allora tutt'i $\Theta$ sono positivi, e tutt'i $\Xi$ negativi.

Se $\Phi = 0$ tutt'i $\Theta$ hanno lo stesso segno.

6.° Il paraboloide (3) è iperbolico o ellittico secondo che la quantità :

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

è negativa o positiva. Le quattro coniche (1) sono ordinariamente ellissi o iperboli secondo che i prodotti :

$$abc\,\alpha\beta\gamma\,.\qquad bc\,,\qquad ca\,,\qquad ab$$

sono negativi o positivi. Nel primo caso però, oltre queste condizioni, devono essere soddisfatte anco queste altre, senza le quali le coniche sarebbero ideali :

$$(16)\quad\begin{cases}\text{per la 1}^{\text{e}}\text{. conica} \ldots\ \alpha(\beta+\gamma) < 0 \quad \beta(\gamma+\alpha) < 0 \quad \gamma(\alpha+\beta) < 0\\ \text{per la 2}^{\text{a}}\text{. conica} \ldots\ c(\alpha-b) < 0 \quad b(\alpha+c) > 0\\ \text{per la 3}^{\text{a}}\text{. conica} \ldots\ a(\beta-c) < 0 \quad c(\beta+a) > 0\\ \text{per la 4}^{\text{a}}\text{. conica} \ldots\ b(\gamma-a) < 0 \quad a(\gamma+b) > 0\end{cases}$$

(*) Plücker, op. cit.

le quali equivalgono ad una sola condizione per ciascuna conica. Le (8) danno:

$$\beta\gamma(\beta'\gamma - \beta\gamma') > 0 \qquad \gamma\alpha(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) < 0 \qquad \alpha\beta(\alpha'\beta - \alpha\beta') > 0$$

ossia, in virtù delle (4):

$$(17) \qquad a\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) > 0 \qquad b\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma) < 0 \qquad c\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) > 0$$

da cui:

$$(18) \qquad abc(\alpha + \beta + \gamma) < 0$$

e:

$$(19) \qquad bc\beta\gamma < 0 \qquad ca\gamma\alpha > 0 \qquad ab\alpha\beta < 0\,.$$

Dalla (18) risulta che la prima conica è ellisse (reale o ideale) o iperbole secondo che la quantità:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

è positiva o negativa. Dunque, secondo che il paraboloide è iperbolico o ellittico, anche la prima conica è iperbole o ellisse (reale o ideale).

Dalle (12) e (13), avuto riguardo alle (4) ed alla (2) si hanno le seguenti formole che ci gioveranno in seguito:

$$(20,\ a) \qquad \lambda-\lambda'=\frac{\alpha+\gamma+\beta}{\alpha'}\,,\quad \mu-\lambda'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+a)}{\alpha'\beta'}\,,\quad \nu-\lambda'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma-a)}{\alpha'\gamma'}$$

$$(20,\ b) \qquad \lambda-\mu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-b)}{\beta'\alpha'}\,,\quad \mu-\mu'=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta'}\,,\quad \nu-\mu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+b)}{\beta'\gamma'}$$

$$(20,\ c) \qquad \lambda-\nu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+c)}{\gamma'\alpha'}\,,\quad \mu-\nu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-c)}{\gamma'\beta'}\,,\quad \nu-\nu'=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma'}$$

$$(21,\ a) \qquad \frac{\lambda''-\lambda}{\lambda\lambda''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\,,\quad \frac{\lambda''-\mu}{\mu\lambda''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-c)}{\alpha\beta}\,,\quad \frac{\lambda''-\nu}{\nu\lambda''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+b)}{\alpha\gamma}$$

$$(21,\ b) \qquad \frac{\mu''-\lambda}{\lambda\mu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+c)}{\beta\alpha}\,,\quad \frac{\mu''-\mu}{\mu\mu''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}\,,\quad \frac{\mu''-\nu}{\nu\mu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma-a)}{\beta\gamma}$$

$$(21,\ c) \qquad \frac{\nu''-\lambda}{\lambda\nu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-b)}{\gamma\alpha}\,,\quad \frac{\nu''-\mu}{\mu\nu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+a)}{\gamma\beta}\,,\quad \frac{\nu''-\nu}{\nu\nu''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}.$$

7.° È chiaro che ad una qualunque delle costanti che entrano nelle equazioni (1) si può dare quel segno che più aggrada; fissato il qual segno ad arbitrio, dai segni delle altre costanti dipende la natura delle quattro coniche. Noi riterremo $\alpha$ positivo.

Supporremo inoltre dapprima che le coniche medesime siano tutte reali: al quale uopo basta che in ciascuna delle equazioni (1) i coefficienti non siano nè tutti positivi, nè tutti negativi.

Siccome la specie delle tre ultime coniche dipende dai segni dei prodotti *bc*, *ca*, *ab*, così queste coniche ponno essere tre iperboli, o due ellissi ed una iperbole, ma non altrimenti; anzi determinata la specie di due fra quelle coniche, anche quella della rimanente è affatto individuata.

Osservo poi che avendosi fra i tre prodotti $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ le relazioni (2) e (19), sui loro segni non ponno farsi che le due seguenti ipotesi:

$$a\alpha > 0 \qquad b\beta < 0 \qquad c\gamma > 0$$

ovvero:

$$a\alpha < 0 \qquad b\beta > 0 \qquad c\gamma < 0$$

nella prima ipotesi la prima conica è un'ellisse, nel secondo un'iperbole. Ciò premesso è evidente che, ammesse le quattro coniche tutte reali, non ponno darsi che questi quattro casi:

A) Il paraboloide sia ellittico; la prima conica ellisse;

1.° caso: la seconda e terza conica siano ellissi; la quarta iperbole;

2.° caso: le tre coniche siano tutte iperboli.

B) Il paraboloide sia iperbolico; la prima conica iperbole;

3.° caso: le altre tre coniche tutte iperboli;

4.° caso: la seconda conica iperbole, le altre ellissi.

È facilissimo persuadersi che non si ponno fare altre ipotesi. Per esempio, non può supporsi la seconda conica ellisse e la terza iperbole, perchè ciò richiederebbe $bc < 0$, $ca > 0$, epperò per le (19) avrebbesi:

$$\beta\gamma > 0 \qquad \gamma\alpha > 0$$

cioè $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ avrebbero segni eguali, e per conseguenza la prima conica sarebbe ideale.

Ora ricerchiamo, in ciascuno de'quattro casi accennati, come siano distribuiti i centri delle varie specie di superficie rappresentate dalla (5) sui cinque segmenti che i punti O, P, Q, R, centri delle coniche (1), determinano sulla retta (7), cioè sulla *locale de'centri*.

A) *Paraboloide ellittico.*

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) > 0$$

*Primo caso.*

8.° In questo caso si ha:

$$\alpha > 0 \quad \beta < 0 \quad \gamma < 0, \qquad a > 0 \quad b > 0 \quad c < 0$$

quindi, per la (18):

$$\alpha + \beta + \gamma > 0 \qquad \beta + \gamma < 0 \qquad \gamma + \alpha > 0 \qquad \alpha + \beta > 0$$

e dalle (16):

$$\alpha - b > 0 \qquad \alpha + c > 0 \qquad \beta - c < 0 \qquad \beta + \alpha < 0.$$

Per $i < 0$ la (9) e la prima delle (10) danno:

$$\Phi < 0\,, \qquad \Theta_1 > 0$$

e la seconda delle (11):

$$\Xi_2 < 0\,.$$

Per $i$ positivo e compreso fra lo zero e $\lambda$ la (9) dà $\Phi > 0$. Per decidere in questo caso se la superficie (5) sia o non sia reale, si cerchi il segno di $\Xi_2$. La (12) dà $\mu' > 0$, e le (20, $b$):

$$\lambda - \mu' < 0$$

dunque a maggior ragione per $i < \lambda$:

$$i - \mu' < 0$$

e conseguentemente dalla seconda delle (15):

$$\Xi_2 < 0.$$

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi < 0$; osservo poi che si ha $\lambda'' > 0$, e dalle (21, $a$), (20, $b$):

$$\lambda'' - \mu > 0\,, \qquad \mu - \mu' < 0$$

dunque le (14), (15) ci daranno $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi > 0$; essendo poi $\nu'' > 0$ e $\nu'' - \lambda < 0$ per le (21, $c$), così dalle (14) avremo $\Theta_3 < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi < 0$, e come dianzi $\Theta_3 < 0$.

Dunque nel caso presente tutt'i punti della retta (7) sono centri di superficie reali; ed invero abbiamo soltanto.

*ellissoidi* pei punti del segmento indefinito che ha un termine in O;
*iperboloidi ad una falda* pei punti del segmento OP;
*ellissoidi* pei punti del segmento PQ;
*iperboloidi ad una falda* pei punti del segmento QR;
*iperboloidi a due falde* pei punti del segmento indefinito che comincia in R.

Questi cinque segmenti si denomineranno ordinatamente *primo*, *secondo*, *terzo*, *quarto* e *quinto*.

*Secondo caso.*

9.° In questo caso si ha:

$$\alpha > 0 \quad \beta < 0 \quad \gamma > 0 \quad a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma < 0 \quad \beta + \gamma < 0 \quad \gamma + \alpha > 0 \quad \alpha + \beta < 0.$$

Per $i < 0$ le (9), (10), (11) danno $\Phi < 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$.

Per $i$ compreso fra lo zero e $\lambda$ si ha $\Phi > 0$, ed inoltre dalle (15):

$$\Xi_3 < 0$$

perchè $\nu' > 0$, $\nu - \nu' < 0$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi < 0$, e dalle (14):

$$\Theta_1 < 0$$

perchè $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda < 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi > 0$, e dalle (15):

$$\Xi_2 < 0$$

perchè $\mu - \mu' > 0$.

Per $i > \nu$ si ha, come per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$:

$$\Phi < 0, \qquad \Theta_1 < 0.$$

Dunque, nel caso attuale, corrispondono superficie reali a tutt'i punti della locale dei centri; e propriamente *ellissoidi* al primo segmento; *iperboloidi ad una falda* al secondo e quarto segmento; *iperboloidi a due falde* al terzo e quinto segmento.

B) *Paraboloide iperbolico*

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) < 0.$$

*Terzo caso.*

10° Si ha:

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad a < 0, \quad b < 0, \quad c < 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma > 0.$$

Per $i < 0$ le (9), (10) danno $\Phi > 0$, $\Theta_2 < 0$.

Per $i$ compreso fra lo zero e $\lambda$ si ha $\Phi < 0$. Inoltre, se $\beta + \gamma > 0$ le (11) danno $\Xi_1 > 0$; se $\beta + \gamma < 0$ e $\beta' + \gamma' > 0$ le (10) danno $\Theta_1 < 0$; se $\beta + \gamma < 0$ $\beta' + \gamma' < 0$ si ha $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda > 0$, quindi le (14) danno ancora $\Theta_1 < 0$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi > 0$, e siccome $\mu' > 0$ e $\mu - \mu' < 0$ così dalle (15) si ha $\Xi_2 < 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi < 0$, ed inoltre $\Theta_2 < 0$ perchè $\mu'' > 0$, $\mu'' - \mu < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi > 0$, ed inoltre, siccome $\lambda - \lambda' > 0$, così le (15) danno $\Xi_1 < 0$.

Adunque, nel caso attuale, si hanno superficie tutte reali, ed invero tutte *iperboloidi ad una falda* pel primo, terzo e quinto segmento; *a due falde* pel secondo e quarto.

*Quarto caso.*

11° In questo caso abbiamo:

$$\alpha > 0\,,\quad \beta > 0\,,\quad \gamma < 0\,,\quad a < 0\,,\quad b > 0\,,\quad c > 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma > 0\,,\quad \beta - c > 0\,,\quad \beta + a > 0\,,\quad \gamma - \alpha < 0\,,\quad \gamma + b < 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_3 < 0$.

Per $i$ compreso tra lo zero e $\lambda$ si ha $\Phi < 0$; inoltre, se $\beta' + \gamma' > 0$ le (10) danno $\Theta_1 < 0$; e se $\beta' + \gamma' < 0$, si ha $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda > 0$, quindi dalle (14) si ha ancora $\Theta_1 < 0$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi > 0$ e $\Xi_3 < 0$ perchè $\mu - \nu' < 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi < 0$; le (14) danno poi $\Theta_3 > 0$ perchè $\nu'' > 0$ e $\nu'' - \mu < 0$: inoltre, siccome $\lambda - \lambda' > 0$, così le (15) danno $\Xi_1 < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi > 0$, e, come poc'anzi, $\Xi_1 < 0$.

Dunque anche in questo caso otteniamo superficie tutte reali; ed invero corrispondono *iperboloidi ad una falda* al primo, terzo e quinto segmento, *iperboloidi a due falde* al secondo; *ellissoidi* al quarto.

Questi sono i soli casi in cui le quattro coniche siano tutte reali, epperò tutte reali siano anco le superficie rappresentate dalla equazione (5) per valori reali del parametro $i$. Veniamo ora a considerare i casi in cui alcuna delle coniche (1) sia ideale.

12.° Innanzi tutto, osservando le (1) è facile persuadersi che se una delle quattro coniche è ideale, ve n'ha un'altra pure ideale, e le due rimanenti sono necessariamente reali: anzi i centri delle due coniche ideali sono sempre consecutivi, cioè non ponno darsi che i tre casi seguenti:

5.° caso: che siano ideali la prima e seconda conica; allora la terza è iperbole e la quarta ellisse;

6.° caso: che siano ideali la seconda e la terza conica; le due rimanenti sono iperboli;

7.° caso: che siano ideali la terza e quarta conica; allora la prima è ellisse e la seconda iperbole.

Ecco come può dimostrarsi l'enunciata proprietà. Suppongasi in primo luogo ideale la prima conica, epperò $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tutti positivi; allora dalle (19) avremo $bc < 0$, $ca > 0$, $ab < 0$; ed inoltre, per la (18), sarà $abc < 0$; quindi $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. Dunque la seconda conica è ideale, la terza è un'iperbole, e la quarta un' ellisse reale.

In secondo luogo suppongasi ideale la seconda e reale la prima conica; allora:

$$a > 0\,,\qquad b < 0\,,\qquad c > 0$$

quindi dalle (19) si ha $\beta\gamma > 0$, epperò, essendo reale la prima conica, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, e inoltre $a < 0$. Dunque la terza conica è ideale, la prima e quarta sono

iperboli. Ora suppongasi ideale la terza conica e reale la seconda; avremo $\beta > 0$, $a > 0$, $c < 0$, quindi dalle (19): $b\alpha < 0$ e, poichè la seconda conica è reale, $b < 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$. Dunque la quarta conica è ideale, la prima è un'ellisse reale, la seconda un'iperbole. Il supporre poi la quarta conica ideale e la terza reale condurrebbe alla conseguenza che $\alpha + \beta + \gamma$ e $abc$ avrebbero lo stesso segno; il che è contrario alla (18).

Nel primo e terzo caso il paraboloide è ellittico; iperbolico nel secondo. Ricerchiamo ora qual sia la distribuzione de'centri delle superficie (5) in ciascuno de'tre casi preaccennati.

*Quinto caso.*

13.° Abbiamo:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi < 0$, ma non può essere simultaneamente $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$, perchè ciò richiederebbe:

$$-i < \frac{\alpha}{\beta' + \gamma'} \quad , \qquad -i > \frac{\gamma + \alpha}{\beta'}$$

il che è evidentemente impossibile.

Per $i$ compreso tra zero e $\lambda$ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 > 0$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi < 0$ e $\Xi_2 > 0$ perchè $\lambda - \mu' > 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi > 0$ e $\Theta_1 < 0$ perchè $\lambda'' < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$.

Dunque in questo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al primo e terzo segmento, *iperboloidi ad una falda* al quarto, *ellissoidi* al quinto, *superficie ideali* al secondo.

*Sesto caso.*

14.° Si ha:

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma < 0, \quad a < 0, \quad b < 0, \quad c > 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 < 0$.

Per $i$ compreso fra lo zero e $\lambda$ si ha $\Phi < 0$, ma non può essere simultaneamente $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$, poichè ciò richiederebbe:

$$\alpha + i(\beta' + \gamma') < 0 \qquad \gamma + \alpha + i\beta' > 0$$

da cui:

$$\gamma - i\gamma' > 0$$

cioè:

$$-i\gamma' > -\gamma$$

ossia, essendo $\gamma$ e $\gamma'$ quantità negative:

$$i > \frac{\gamma}{\gamma'}$$

epperò $i$ non compreso fra zero e $\lambda$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Theta > 0$; inoltre $\Theta_1 > 0$ perchè $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda < 0$, $\Xi_2 > 0$ perchè $\lambda - \mu' > 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi > 0$ e $\Xi_2 < 0$ perchè $\nu - \mu' > 0$.

Dunque in questo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* al primo e quinto segmento; *iperboloidi a due falde* al secondo e quarto; *superficie ideali* al terzo.

*Settimo caso.*

15.° In questo caso si ha:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma < 0, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad c < 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_3 < 0$.

Per $i$ compreso fra lo zero e $\lambda$ si ha $\Phi > 0$ e $\Xi_1 < 0$ perchè $\lambda - \lambda' < 0$.

Per $i$ compreso fra $\lambda$ e $\mu$ si ha $\Phi < 0$ e $\Xi_2 > 0$ perchè $\mu - \mu' < 0$.

Per $i$ compreso fra $\mu$ e $\nu$ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 > 0$ perchè $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda < 0$, e $\Xi_2 > 0$ perchè $\nu - \mu' < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 < 0$.

Dunque nel caso attuale corrispondono *ellissoidi* al primo segmento, *iperboloidi ad una falda* al secondo; *iperboloidi a due falde* al terzo e quinto; *superficie ideali* al quarto.

16.° Nelle cose precedenti abbiamo sempre supposto che le equazioni (1) rappresentassero coniche nel significato più generale della parola, cioè *iperboli* od *ellissi* (reali o ideali). Ma una di esse (ed una sola) potrebbe essere una *parabola*; per es. lo sarebbe la quarta se si avesse $\gamma' = 0$. Allora non si ha più paraboloide, perchè l'equazione (3) viene a coincidere colla quarta delle (1), avendosi in tal caso:

$$a\alpha' + b\beta' = 0.$$

In questa ipotesi hanno luogo ancora i casi sopra considerati, ad eccezione del settimo, che non può più verificarsi, perchè, essendo attualmente:

$$\gamma + b - a = 0$$

non può più aversi simultaneamente $\gamma < 0$, $a > 0$, $b < 0$. Dalla locale de'centri scompare l'ultimo segmento, e il quarto diviene indefinito, allontanandosi il punto R all' infinito. Pei quattro segmenti che rimangano hanno luogo ancora tutte le conseguenze a cui siamo arrivati pei primi quattro segmenti nel caso generale che il punto R sia a distanza finita.

17.° È interessante il caso che una delle quantità costanti che entrano nelle (1) sia nulla. Sia $\gamma = 0$ ; allora la prima e la quarta delle (1) coincidono perchè:

$$a\alpha + b\beta = 0$$

e la prima e quarta conica degenerano nel medesimo sistema di due punti, che sono i vertici dei due coni di seconda classe in cui si decompone attualmente la superficie sviluppabile circoscritta. In tal caso la seconda e la terza conica sono quelle nelle quali si segano i coni medesimi.

La distribuzione dei centri delle superficie (5) si deduce dalle conclusioni generali esposte superiormente, supponendo che due punti consecutivi, fra i quattro O, P, Q, R, si riuniscono in un solo. Siano A e B i centri delle due coniche, ed M il punto medio della retta congiungente i vertici de'due coni, il qual punto è sulla retta AB ed è quello in cui si sono riuniti i centri delle altre due coniche. Se la riunione dei centri di due coniche nel punto M si fa ne'primi quattro casi (numeri 8, 9, 10, 11) risulteranno reali sì le due coniche rimanenti che i vertici dei due coni. Ma se invece assumiamo gli altri tre casi (numeri 13, 14, 15), allora se riuniamo in M i centri delle due coniche ideali, le coniche rimanenti saranno reali, e ideali i vertici de'due coni; se riuniamo in M i centri delle due coniche reali (ove siano consecutivi) le coniche rimanenti saranno ideali, e i vertici de'due coni reali; se da ultimo riuniamo in M i centri di una conica reale e di una ideale, delle due coniche restanti una sola sarà reale, e i vertici de'due coni saranno ideali.

Ecco i risultati che si ottengono per tal modo.

A). Siano reali sì i vertici de'due coni che le due coniche.

*a*). Sia inoltre il *paraboloide ellittico*. Le coniche ponno essere entrambe ellissi, o entrambe iperboli, o di specie diversa. Nel primo e secondo caso i punti A e B sono situati dalla stessa banda rispetto al punto M; nel terzo caso il punto M cade fra A e B.

Nel primo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al segmento indefinito della locale che ha un termine in M; *ellissoidi* al segmento finito che ha pure un termine in M; *iperboloidi ad una falda* al segmento AB; *ellissoidi* all'altro segmento indefinito.

Nel secondo caso corrispondono *ellissoidi* al segmento indefinito che ha un termine in M; *iperboloidi a due falde* al segmento finito che ha pure un termine in M, ed all'altro segmento indefinito; *iperboloidi ad una falda* al segmento AB.

Nel terzo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* ai due segmenti compresi fra A e B; *ellissoidi* all'uno, *iperboloidi a due falde* all'altro de'segmenti indefiniti.

*b*). Sia il *paraboloide iperbolico*; ponno ancora aver luogo i tre casi poc'anzi accennati, rispetto alla specie delle coniche; rimane pure la medesima la disposizione de'punti A, B, M.

Nel primo caso corrispondono *ellissoidi* al segmento AB; *iperboloidi ad una falda* agli altri tre.

Nel secondo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al segmento AB; *iperboloidi ad una falda* agli altri tre.

Nel terzo caso corrispondono respettivamente *ellissoidi* e *iperboloidi a due falde* ai due segmenti finiti; *iperboloidi ad una falda* agli altri due.

B). Siano reali le due coniche, e ideali i vertici de'due coni.

*a*). *Paraboloide ellittico.* Le due coniche sono di specie diversa, e i loro centri collocati dalla stessa banda rispetto al punto M. Corrispondono *iperboloidi ad una falda* al segmento AB; *iperboloidi a due falde* ai due segmenti che contengono M; *ellissoidi* al rimanente.

*b*). *Paraboloide iperbolico.* Le due coniche sono iperboli. Il punto M cade fra A e B. In questo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* ai segmenti finiti, *ad una falda* agli indefiniti.

C). Siano ideali le due coniche, e reali i vertici de'due coni.

Il *paraboloide* non può essere che *ellittico.* I punti A e B si trovano dalla stessa banda rispetto ad M. Corrispondono *superficie ideali* al segmento AB; *iperboloidi a due falde* al segmento antecedente e conseguente; *ellissoidi* a quello che resta.

D). Se i vertici de' due coni sono ideali, le due coniche non ponno essere entrambe ideali, ma lo può essere una di esse. Sia B il centro della conica ideale. L'altra conica può essere ellisse o iperbole. Nel primo caso il *paraboloide* è *ellittico* e il punto M cade fra A e B. Nell'altro caso il *paraboloide* è *iperbolico* e il punto B cade fra A ed M.

Nel primo caso corrispondono *superficie ideali* al segmento BM; *iperboloidi ad una falda* al segmento MA; *ellissoidi* al segmento indefinito che comincia in A; *iperpoloidi a due falde* all'altro.

Nel secondo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* ai segmenti indefiniti; *iperboloidi a due falde* al segmento AB; *superficie ideali* al segmento BM.

18.° Ritorno al problema generale trattato ne' primi quindici numeri, e prendo a considerare quella funzione del parametro $i$ che rappresenta il prodotto degli assi della superficie (5). Quella funzione sarà infinita per $i=\infty$, cioè pel paraboloide; nulla per $i=0$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ossia per le coniche; epperò essa diverrà *massima* per tre valori finiti di $i$, l'uno compreso fra lo zero e $\lambda$, l'altro fra $\lambda$ e $\mu$, il terzo fra $\mu$ e $\nu$. Quindi in ciascuno de'primi quattro casi colà considerati esisteranno tre superficie reali, e due in ciascuno degli altri tre, per le quali sarà massimo il prodotto degli assi.

Se si cerca l'ellissoide di massimo volume fra tutti quelli inscritti in una stessa sviluppabile, il problema non ammette soluzione che nel primo e quarto caso, cioè

quando le coniche sono tutte reali, e fra esse una sia iperbole, le altre ellissi, ovvero due iperboli e due ellissi. Nel primo caso il valore di $i$ che corrisponde al massimo ellissoide è compreso fra $\lambda$ e $\mu$; nel quarto fra $\mu$ e $\nu$.

Il prodotto dei quadrati degli assi della superficie (5) è eguale alla quantità $\Phi$ moltiplicata per un fattore indipendente da $i$. Eguagliando a zero la derivata di $\Phi$ presa rispetto ad $i$ si ha l'equazione cubica:

$$4i^3 - 3(\lambda + \mu + \nu)i^2 + 2(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)i + \lambda\mu\nu = 0$$

le radici della quale (tutte reali e positive) sono i valori del parametro $i$ relativi a quelle superficie (5) per le quali è massimo il prodotto degli assi. Il coefficiente del secondo termine essendo:

$$-\frac{3}{4}(\lambda + \mu + \nu)$$

ne segue che il centro di gravità de'centri delle tre superficie per le quali è massimo il prodotto degli assi coincide col centro di gravità de'centri delle quattro coniche.

Quando la sviluppabile circoscritta si decompone in due coni di seconda classe, non rimanendo più che due segmenti finiti nella locale de' centri, saranno pur due sole le superficie per le quali riuscirà massimo il prodotto degli assi. Si avrà un ellissoide massimo solamente quando siano reali i vertici de'due coni, e reali le coniche intersezioni dei medesimi, e almeno una di esse sia ellisse, quando il paraboloide inscritto nel sistema de'due coni è iperbolico, ovvero le coniche siano entrambe ellissi, ove il paraboloide sia ellittico.

19.° Da quanto precede si ponno concludere molte proposizioni relative al sistema di superficie (5). Eccone le principali.

*Si abbia un sistema di superficie della seconda classe inscritta nella stessa superficie sviluppabile della quarta classe: fanno parte del sistema quattro coniche le quali o sono tutte reali, o due sono reali e due ideali. Fa parte del medesimo sistema anche un paraboloide, il quale scompare solo quando una delle quattro coniche sia una parabola.*

*I centri di tutte quelle superficie sono in una stessa retta, che è dai centri delle quattro coniche divisa in cinque segmenti, tre finiti e due indefiniti. Le superficie che hanno i centri in uno stesso segmento sono tutte della medesima specie, la quale cambia da un segmento all'altro, in modo che si otterranno le superficie rigate e le non rigate.*

*Tali superficie sono tutte reali se le quattro coniche sono tutte reali; se vi sono due coniche ideali i centri di queste sono sempre consecutivi e comprendono un segmento ai punti del quale non corrispondono che superficie ideali; mentre ne' punti degli altri segmenti corrispondono superficie tutte reali. Una serie di superficie ideali*

*occupa sempre un segmento finito e sta invece di una serie di superficie rigate, ossia è compresa fra due serie di superficie non rigate, che sono sempre iperboloidi a due falde.*

*Supposte le coniche tutte reali, quando il paraboloide è ellittico, quelle sono tre ellissi ed una iperbole, o tre iperboli ed una ellisse; e quando il paraboloide è iperbolico le coniche sono o tutte iperboli, o due ellissi e due iperboli: in entrambi i casi i centri delle coniche della stessa specie sono disposti consecutivamente sulla locale de' centri.*

*Quando il paraboloide è iperbolico i segmenti indefiniti contengono i centri di superficie che sono tutte iperboloidi ad una falda. Se il paraboloide è ellittico, uno de' segmenti indefiniti contiene i centri di ellissoidi, l'altro d'iperboloidi a due falde.*

*Se un segmento finito contiene i centri di superficie non rigate, queste sono ellissoidi solo quando i termini del segmento siano i centri di due ellissi.*

*Fra le infinite superficie del sistema, ve ne sono tre per le quali è massimo il prodotto degli assi; i loro centri appartengono rispettivamente ai tre segmenti finiti. Una delle tre superficie è ideale, quando vi sia una coppia di coniche ideali. Fra le superficie del sistema esiste un ellissoide di volume massimo solo quando le quattro coniche siano tutte reali, e fra esse vi siano tre ellissi se il paraboloide è ellittico, o due ellissi se il paraboloide è iperbolico.*

*Il centro di gravità de' punti centri delle tre superficie per le quali è massimo prodotto degli assi coincide col centro di gravità de' centri delle quattro coniche.*

20.° Terminerò esponendo due proprietà del sistema di superficie (5).

Cerco le equazioni del diametro della superficie (5) coniugato ad un piano diametrale qualunque, di coordinate $t'$, $u'$, $v'$, $w'$, ove sia identicamente:

$$At' + Bu' + Cv' + Dw' = 0.$$

Il polo di quel piano è:

$$At(t' + w') + Bu(u' + w') + Cv(v' + w') = 0$$

il qual punto insieme al centro della superficie (5) determina il diametro richiesto, il quale è perciò rappresentato dalla equazione precedente e dalla (6). Se da queste equazioni si elimina $i$ si ha la:

$$(\alpha' t + \beta' u + \gamma' v)(\alpha t' t + \beta u' u + \gamma v' v - D w' w)$$
$$- (\alpha' t' t + \beta' u' u + \gamma' v' v)(\alpha t + \beta u + \gamma v + D w) = 0$$

*I diametri delle superficie di seconda classe inscritte in una stessa sviluppabile, coniugati ad una medesima direzione, sono generatrici di uno stesso paraboloide iperbolico.*

Se si cercano i diametri della superficie (5) coniugati ai piani delle quattro co-

niche, si trovano essere le rette congiungenti il centro della superficie ai vertici del tetraedro polare. Il che era d'altronde facile a prevedersi.

Cerchiamo da ultimo qual superficie inviluppino i piani diametrali delle superficie (5) coniugati ad una retta data di direzione. La data direzione sia individuata mediante l'equazione (*):

$$\lambda t + \mu u + \nu v = 0:$$

Siano $t$, $u$, $v$, $w$ le coordinate del piano diametrale della (5) coniugato a quella direzione; avremo

$$\frac{A(t + w)}{\lambda} = \frac{B(u + w)}{\mu} = \frac{C(v + w)}{\nu}$$

$$At + Bu + Cv + Dw = 0$$

da cui, posto $\lambda + \mu + \nu = k$ abbiamo le:

$$k\alpha(t + w) - i \{ \alpha' k(t + w) - \lambda Dw \} = 0$$

$$k\beta(u + w) - i \{ \beta' k(u + w) - \mu Dw \} = 0$$

$$k\gamma(v + w) - i \{ \gamma' k(v + w) - \nu Dw \} = 0$$

le quali danno $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ in funzione di $i$. Eliminando $i$ si hanno le equazioni di tre iperboloidi aventi a due a due una generatrice comune; essi individuano, mediante i loro piani tangenti comuni, una superficie sviluppabile della terza classe (che ha per spigolo di regresso una cubica gobba). Dunque:

*I piani diametrali della superficie di seconda classe inscritte in una stessa sviluppabile, coniugati ad una retta di direzione data, inviluppano una superficie sviluppabile della terza classe.*

Cremona, 14 dicembre 1858.

(*) Qui le $\lambda$, $\mu$, $\nu$ indicano costanti arbitrarie, epperò diverse da quelle adoperate nelle equazioni (8).



# LA TEORICA DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI DELLE FORME BINARIE E LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI.

## MONOGRAFIA

**DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.**

(Continuazione V. pag. 361. T.° I.°)

### CAP.° IV.° DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE CARATTERISTICHE PEL DISCRIMINANTE.

1.° Abbiamo dimostrato al Cap.° 1.° §.° IV.° che il discriminante di una forma binaria qualunque è un invariante della medesima; quindi il discriminante della forma di grado $n$ dovrà soddisfare alle equazioni (38) caratteristiche per gli invarianti di quella forma. Ma nel caso del discriminante queste equazioni fanno parte di un gruppo di $n$ equazioni alle derivate; le quali sono soddisfatte dal medesimo e che perciò denomineremo equazioni caratteristiche pel discriminante.

Rammentando le denominazioni introdotte al §.° 5.° del Cap.° antecedente e le note relazioni Newtoniane fra le somme delle potenze delle radici ed i coefficienti; ponendo:

$$\alpha_{m,r} = \alpha_{r,m} = \sum_{1}^{m}{}_{s}(r+m-2s)p_{s-1}\,p_{r+m-s-1}\,a_{s-1}\,a_{r+m-s-1} - (n-r+1)p_{m-1}\,p_{r-1}\,a_{m-1}\,a_{r-1}$$

si otterrà facilmente la relazione ;

$$-\,p_m\,p_r \sum_{1}^{n}{}_{s} \frac{da_m}{dx_s}\frac{da_r}{dx_s} = \alpha_{m,r}\,.$$

Sia ora $\lambda$ una funzione qualsivoglia dei coefficienti $a_0$, $a_1$, ... e quindi dalle radici $x_1$, $x_2$ ... dell'equazione $u(x,1) = 0$. Essendo :

$$\frac{d\lambda}{da_1}\frac{da_1}{dx_s} + \frac{d\lambda}{da_2}\frac{da_2}{dx_s} + \ldots + \frac{d\lambda}{da_n}\frac{da_n}{dx_s} = \frac{d\lambda}{dx_s}$$

si avrà :

$$(45)\qquad \frac{1}{p_1}\alpha_{m,1}\frac{d\lambda}{da_1} + \frac{1}{p_2}\alpha_{m,2}\frac{d\lambda}{da_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\alpha_{m,n}\frac{d\lambda}{da_n} = -\,p_m \sum_{1}^{n}{}_{s}\frac{da_m}{dx_s}\frac{d\lambda}{dx_s}$$

Suppongasi la funzione $\lambda$ eguale al discriminante $\Delta$ della forma $u(x,y)$ dell'ennesimo grado, cioè sia :

$$\lambda = \Delta = a_0^{2(n-1)}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2,$$

ponendo $u'(x) = \frac{du}{dx}$, $u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2}$ si avrà :

$$\frac{d\Delta}{dx_s} = \Delta \frac{u''(x_s)}{u'(x_s)}$$

od anche per la formola :

$$-\frac{1}{p_r}\frac{dx_s}{da_r} = \frac{x_s^{n-r}}{u'(x_s)}$$

sarà :

$$-\frac{d\Delta}{dx_s} = n(n-1)\Delta\left\{\frac{1}{p_2}a_0\frac{dx_s}{da_2} + \frac{(n-2)}{p_3}a_1\frac{dx_s}{da_3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ p_4}a_2\frac{dx_s}{da_4} + \ldots + \frac{1}{p_n}a_{n-2}\frac{dx_s}{da_n}\right\}.$$

Ora :

$$\sum_1^n{}_s \frac{da_r}{dx_s}\frac{dx_s}{da_m} = 0, \qquad \sum_1^n{}_s \frac{da_m}{dx_s}\frac{dx_s}{da_m} = 1$$

quindi :

$$-\sum_1^n{}_s \frac{da_m}{dx_s}\frac{d\Delta}{dx_s} = (n-m+2)(n-m+1)\frac{p_{m-2}}{p_m}a_{m-2}\Delta$$

e sostituendo nella (45):

$$(46) \qquad \sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r}\alpha_{m,r}\frac{d\Delta}{da_r} = (n-m+2)(n-m+1)p_{m-2}\,a_{m-2}\,\Delta.$$

In questa equazione la $m$ potendo assumere i valori 1, 3, 3, ... $n$; si ottengono $n$ equazioni alle quali deve soddisfare il discriminante. Le prime tre fra esse sono comuni cogli invarianti, per mezzo delle altre si potrà esprimere il discriminante della forma di grado $n$ in funzione dei suoi invarianti. Se nelle equazione (46) si pone $m = 1$ si ottiene :

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r}\alpha_{1,r}\frac{d\Delta}{da_r} = -a_0\sum_1^n{}_r (n-r+1)\frac{p_{r-1}}{p_r}a_{r-1}\frac{d\Delta}{da_r} = -a_0\sum_1^n{}_r\, r a_{r-1}\frac{d\Delta}{da_r} = 0$$

quindi la equazione (46) per $m = 2, 3, \ldots n$ si potrà porre sotto la forma più semplice :

$$(47) \qquad \sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r}A_{m,r}\frac{d\Delta}{da_r} = (n-m+2)(n-m+1)p_{m-2}\,a_{m-2}\,\Delta$$

supposto :

$$A_{m,r} = \sum_1^m{}_s (r+m-2s)p_{s-1}\,p_{r+m-s-1}\,a_{s-1}\,a_{r+m-s-1}.$$

*

*Applicazione.* Considero la forma di quinto grado:

$$(a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\ \ldots\ a_5)(x, y)^5.$$

Ponendo per brevità:

$$A = 2(a_0\,a_4 - 4a_1\,a_3 + 3a_2^2)\,,\qquad B = a_0\,a_5 - 3a_0\,a_4 + 2a_2a_3\,,$$

$$C = 2(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2)$$

e:

$$-6\alpha = a_0C - 2a_1B + a_2A \qquad -6\gamma = a_2C - 2a_3B + a_4A$$

$$-6\beta = a_1C - 2a_2B + a_3A \qquad -6\delta = a_3C - 2a_4B + a_5A\,;$$

gli invarianti di quarto grado e di ottavo grado della medesima si ponno porre sotto la forma:

$$I_4 = AC - B^2\,,\qquad I_8 = 9\,\{A(\beta\delta - \gamma^2) + B(\beta\gamma - \alpha\delta) + C(\alpha\gamma - \beta^2)\}\,.$$

Ora operando su questi invarianti col simbolo (47) nel quale facciasi $m = 4$, si ottengono le relazioni:

$$\sum_1^5{}_r \frac{1}{p_r}\,A_{4,r}\frac{dI_4}{da_r} = 30a_2\,I_4 + 48(A\gamma - 2B\beta + C\alpha)$$

$$\sum_1^5{}_r \frac{1}{p_r}\,A_{4,r}\frac{dI_8}{da_r} = 60a_2\,I_8 + \frac{3}{4}I_4(A\gamma - 2B\beta + C\alpha)$$

quindi ponendo:

$$\Delta = I_4^2 + hI_8$$

si avrà:

$$\sum_1^5{}_r \frac{1}{p_r}\,A_{4,r}\frac{d\Delta}{da_r} = 60a_2(I_4^2 + hI_8) + (A\gamma - 2B\beta + C\alpha)\left(96 + \frac{3}{4}h\right);$$

ma per la (47) dovendo essere nullo l'ultimo termine del secondo membro, risulterà $h \pm -128$, per cui:

$$\Delta = I_4^2 - 128\,I_8\,.$$

2.° Sia $\psi(x, y) = (\alpha_0\,,\ a_1\,,\ \ldots\ \alpha_5)(x, y)^5$ un covariante della forma dell'ennesimo grado, ed indicando con $P_m$ il simbolo di operazione:

$$\sum_1^n{}_r\ \frac{1}{p_r}\,A_{m,r}\frac{d}{da_r}$$

Suppongansi:

$$P_m(\alpha_0) = \lambda_m\,a_{m-2}\,\alpha_0 + q_m\,sa_{m-3}\,\alpha_1\,,$$

$$P_m(\alpha_s) = p_m sa_{m-1}\,\alpha_{s-1} + (s\mu_m + \lambda_m)a_{m-2}\,\alpha_s\,,$$

$$P_m(\alpha_r) = p_m\,ra_{m-1}\,\alpha_{r-1} + (r\mu_m + \lambda_m)a_{m-2}\,\alpha_r + q_m(s-r)a_{m-3}\,\alpha_{r+1}$$

per $r = 2, 3, \ldots s - 1$. Le $p_m$, $q_m$, $\lambda_m$, $\mu_m$ sono coefficienti numerici.

Rappresenti $\varphi(\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$ un invariante di grado $k$ della forma $\psi(x, y)$, essendo:

$$P_m(\varphi) = \frac{d\varphi}{d\alpha_0} P_m(\alpha_0) + \frac{d\varphi}{d\alpha_1} P_m(\alpha_1) + \ldots + \frac{d\varphi}{d\alpha_s} P_m(\alpha_s)$$

si otterrà pei valori superiori:

$$P_m(\varphi) = \frac{k}{2}(s\mu_m + 2\lambda_m)a_{m-2}\,\varphi;$$

quindi rammentando l'equazione (47), se:

$$(49) \qquad \frac{k}{2}(s\mu_m + 2\lambda_m) = \rho(n - m + 2)(n - m + 1)p_{m-2}$$

sarà:

$$\varphi = \varepsilon\Delta^\rho$$

$\varepsilon$, $\rho$ coefficienti numerici.

*Esempio.* Sia $n = 4$, $m = 4$ ed indicando con $v$ l' Hessiano della forma $u$ (Cap.° 2.° §.° 3.°) si supponga:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix}$$

sarà $s = 6$, e l'equazione (49) diverrà:

$$k(3\mu_4 + \lambda_4) = 12\rho.$$

Ora formando le (48) si trovano in questo caso i valori $p_4 = q_4 = 1$, $\lambda_4 = -3$, $\mu_4 = 3$; quindi $k = 2\rho$; cioè gli invarianti del covariante $\psi$ del sesto ordine sono tutti potenze del discriminante della forma di quarto grado. (*)

3.° Aggiungiamo una seconda applicazione della formola generale (45). Ponendo $\lambda = x_s$ si ottiene:

$$\sum_1^u {}_s \frac{1}{p_r}\alpha_{m,r}\frac{dx_s}{da_r} = a_0 x_s^{m-1} + p_1 a_1 x_s^{m-2} + \ldots + p_{m-1} a_{m-1},$$

e da essa deducesi $n$ equazioni alle derivate alle quali deve soddisfare ciascuna delle radici dell'equazione $u(x, 1) = 0$.

---

(*) Hermite. Sur la théorie des fonctions homogènes ec. — Journal de Crelle. T. 52. Second Mémoire.

# GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DE L'INVOLUTION.

## APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

PAR E. DE JONQUIÈRES.

Soient $X=0$, $X'=0$, deux équations algébriques du degré $n$, dont les racines représentent, respectivement, les distances de deux groupes de $n$ points donnés sur une droite L à une origine fixe prise sur cette droite. L'équation

$$(a) \qquad X+\lambda X'=0$$

où L est une indéterminée, représente une infinité de groupes de $n$ points, dont chacun correspond à une valeur particulière de $\lambda$, et dont font partie les deux groupes donnés. Dans chacun de ces groupes, un point quelconque détermine $\lambda$ et par conséquent les $n-1$ autres. Donc tous les points d'un même groupe ont entre eux une dépendance mutuelle qui permet, à certains égards, de les changer indistinctement l'un dans l'autre par une sorte d'alternance cyclique ou d'*involution*, analogue à celle qui a plus particulièrement attiré l'attention des Géomètres dans le second degré; et l'on peut dire, pour abréger le discours, que les groupes de $n$ points, que l'équation $(a)$ représente en nombre infini, forment entre eux une *involution du* $n^{eme}$ *ordre*.

On voit immédiatement qu'une telle involution est déterminée par deux groupes de points.

Les séries en involution d'un ordre quelconque jouissent de propriétés analogues à celles qu'on connait pour le second degré, et donnent lieu à des applications intéressantes. En exposant les plus remarquables de ces propriétés, je supprimerai les démonstrations que le défaut d'espace ne me permet pas d'insérer dans le présent recueil.

Théorème I. *Quand quatre groupes de* n *points sur une droite sont en involution, leurs centres des moyennes harmoniques, pris par rapport à un point fixe de cette droite, ont leur rapport anharmonique constant, quel que soit ce point.*

Le rapport constant s'appelle le *rapport anharmonique* des quatre groupes.

Quand le point fixe est à l'infini, le pôle harmonique devient le centre des moyennes distances. Ainsi le rapport anharmonique de quatre groupes n'est autre que celui de leurs centres des moyennes distances. Plus généralement, si l'on dit qu'une série de groupes de $n$ points en involution correspond anharmoniquement à une série de points ou à un faisceau de droites ou de courbes, il faut entendre que les centres des moyennes distances de ces groupes forment une division homographique à celle

des droites ou des points donnés, ou des tangentes menées aux courbes du faisceau en l'un de leurs $n^2$ points communs.

Théorème II. *Toute involution de l'ordre* n *possède* 2(n — 1) *points doubles, réels ou imaginaires; mais, en général, elle ne possède aucun point multiple d'un ordre plus élevé.*

Théorème III. *Si l'on coupe par une droite un faisceau de courbes planes de l'ordre* n, *les groupes de* n *points, que ces courbes interceptent sur la transversale, y forment une involution du* n$^{eme}$ *ordre.*

Réciproquement : *Une involution de l'ordre* n *étant donnée sur une droite, on peut regarder les groupes de* n *points qui la composent, comme résultant des intersections de cette droite par un faisceau de courbes de l'ordre* n.

On sait que, parmi les courbes d'un faisceau de l'ordre $n$, il y en a $2(n-1)$ qui touchent une droite donnée. Leurs points de contact sont précisément les points doubles dont il est question au théorème II.

Théorème IV. *Dans toute involution de l'ordre* n, *il existe* (n—1) *points tels, que le produit des distances de chacun d'eux à tous les points d'un même groupe est constant, quel que soit ce groupe. Ces points sont les conjugués de celui qui est situé à l'infini.*

Ce points correspondent à celui que M. Chasles a nommé *point central* dans l'involution du second degré, et ils jouissent d'une propriété analogue.

Théorème V. *Deux séries en involution de l'ordre* n *sur une même droite, n'ont, en général, aucun groupe commun.*

Celles du second degré font seules exception.

Théorème VI. *Dans le cas particulier où deux séries en involution sur une droite ont un groupe commun, elles ne peuvent en avoir un second.*

Théorème VII. *Quand on a, sur une droite, deux séries en involution des ordres* n *et* n', *dont les groupes se correspondent anharmoniquement, il existe, dans chaque série,* n+n' *groupes dont chacun a un point commun avec son homologue de l'autre série.*

Problème I. *Deux groupes de* n *points étant donnés sur une droite* L, *construire géométriquement tous les autres groupes de l'involution que ces deux-là déterminent.*

Soient $m_1$, $m_2$, $m_3$, ... $m_n$ les $n$ points du premier groupe, et $m'_1$, $m'_2$, $m'_3$ ... $m'_n$ ceux du second. Prenons arbitrairement deux points P, P' hors de la droite L, et joignons le point P à tous les points des deux groupes. Enfin menons, à volonté, par le point P', deux transversales P'M, P'M', dont l'une coupe le faisceau de droites $P(m_1, m_2 \ldots m_n)$ aux points $\mu_1$, $\mu_2$, ... $\mu_n$, et dont l'autre coupe le faisceau $P(m'_1, m'_2, \ldots m'_n)$ aux points $\mu'_1$, $\mu'_2$, ... $\mu'_n$. Par les $2n$ points $\mu_1$, $\mu_2$, ... $\mu_n$, $\mu'_1$, $\mu'_2$, ... $\mu'_n$ ainsi obtenus, on peut faire passer une courbe $C_n$ du $n^{eme}$

ordre, douée en P d'un point multiple de l'ordre (*) $n-1$, et l'on ne peut en faire passer qu'une. Car le point multiple, donné d'ordre et de position, équivaut, comme on sait, à $\frac{1}{2}n(n-1)$ points simples donnés. La courbe est donc, par équivalence, assujétie à passer par $\frac{1}{2}n(n-1)+2n=\frac{1}{2}n(n+3)$ points; ce qui prouve qu'elle est déterminée et unique généralement.

Cela posé, toute transversale, issue du point P', coupe la courbe en $n$ points qui, vus du point P, se projettent sur L suivant un groupe faisant partie de l'involution qui est déterminée par les deux groupes donnés.

Les groupes de points ainsi déterminés, et les cordes correspondantes, issues du point P', se correspondent anharmoniquement.

Du point P', on ne peut mener, en général, à la courbe $C_n$ que $2(n-1)$ tangentes, parce que la droite P'P, qui passe par le point multiple, équivaut à $(n-1)(n-2)$ autres tangentes. Les $2(n-1)$ points de contact, projetés sur L, sont les points doubles de l'involution.

Problème II. *Une involution cubique étant donnée sur une droite* L, *trouver ses quatre points doubles.*

On déterminera, comme dans le problème précédent, mais d'ailleurs sans la construire, une courbe auxiliaire du troisième ordre $C_3$, douée d'un point double en P, et *correspondante* à l'involution donnée. Les quatre tangentes qu'on peut mener à cette courbe par le point P' (auquel la courbe est relative), déterminent quatre points de contact qui, étant projetés du point P sur L, y marquent les points doubles cherchés. Ces points de contact sont les points d'intersection de la $C_3$ par le *conique polaire* du point P' relative à $C_3$. On sait construire cette conique, qui passe par le point double P, sans être obligé de construire la cubique. Quant aux points d'intersection de $C_2$ et $C_3$, M. Chasles a fait voir (*tome* XLI *des Comptes Rendus de l'Académie des sciences*) que la question se réduit à construire une autre conique $C'_2$, qui résulte des données mêmes de la question, et à chercher les points d'intersection de ces deux coniques.

Le problême proposé exige donc le *tracé* de deux coniques; condition inévitable, puisqu'il comporte quatre solutions, dont aucune ne peut s'obtenir isolément des trois autres.

Problème III. *Construire une courbe du troisième ordre, qui passe par huit points donnés et qui touche une droite* L.

Par les huit points donnés, et par deux points $a$, $a'$ pris arbitrairement sur L, faites passer, respectivement, deux courbes du troisième ordre; vous trouverez, par

(*) Au sujet de la construction de cette courbe à point multiple, voyez mon Mémoire sur les courbes géométriques inséré dans le Journal des Savants étrangers, page 55.

des constructions qui n'exigent l'emploi que de la règle et du compas, les deux segments $bc$, $bc'$, que ces courbes interceptent sur L en outre des deux points déja connus $a$ et $a'$.

Cela posé, les deux groupes ternaires $abc$, $a'b'c'$ déterminent sur L une involution cubique, dont vous chercherez les quatre points doubles (Problème II). Chacune des quatre courbes menées par les huit points donnés et par ces quatre points, respectivement, satisfait à la question.

*Remarque* — On résoudrait, par des considérations analogues, la question suivante :

*Par treize points donnés, faire passer une courbe du quatrième ordre qui touche une droite donnée;*

Question qui admet six solutions distinctes.

Problème IV. *Une involution étant donnée sur une droite, déterminer sur cette droite une seconde involution qui ait en commun avec celle-là un groupe de points désigné et qui, en outre, passe par deux points donnés.*

La solution de ce problème est, comme le lecteur le remarquera, une conséquence facile de celle du problème I. Je ne la donnerai donc pas ici.

Problème V. *Etant données, sur une droite* L, *deux séries en involution, l'une du troisième ordre et l'autre du second ordre, dont les groupes se correspondent anharmoniquement un à un, trouver géométriquement les points communs aux groupes correspondants des deux séries.*

D'après le théorème VII, il existe cinq groupes de l'une des séries, dont chacun a un point commun avec celui qui lui correspond dans l'autre série. Ce sont ces cinq points qu'il s'agit de déterminer.

Soient $n_1 n_2$, $n'_1 n'_2$, $n''_1 n''_2$ trois segments de l'involution du second ordre, et soient $m_1 m_2 m_3$, $m'_1 m'_2 m'_3$, $m''_1 m''_2 m''_3$ les groupes ternaires qui leur correspondent, respectivement.

Prenons arbitrairement un point P; joignons-le aux points $m_1 m_2 m_3$, et coupons ces trois droites en $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ par une transversale quelconque M. Imaginons alors que, par les trois points ainsi obtenus, on fasse passer une infinité de courbes du troisième ordre ayant toutes un point double en P, et pour tangentes en ce point les deux droites $Pn_1$, $Pn_2$. Ce *faisceau* de cubiques est déterminé; car le point double et ses deux tangentes équivalent à cinq conditions, ce qui en fait huit en comptant les trois points $\mu_1 \mu_2 \mu_3$. Cela posé, il faut déterminer une des courbes de ce faisceau de telle sorte, que ses trois points de rencontre $\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$ avec les trois droites $Pm'_1$ $Pm'_2$ $Pm'_3$, respectivement, soient situés en ligne droite.

Or une courbe Z de ce faisceau marque sur $Pm'_1$ un point $z_1$, sur $Pm'_2$ un point $z_2$ et sur $Pm'_3$ un point $z_3$. Les points $z_1$ forment entre eux une division ho-

mographique à celle des points $z_2$ et aussi à celle des points $z_3$. Donc les droites $z_1 z_2$ enveloppent une conique, et les droites $z_1 z_3$ en enveloppent une autre. L'une des quatre tangentes communes à ces deux coniques est la droite M elle-même; car elle correspond à celle des courbes du faisceau que représente le système des trois droites $Pn_1$, $Pn_2$ et M. Les trois autres tangentes, dont une sera toujours réelle, satisfont à la question; c'est-à-dire, que si $M'$ est une de ces tangentes, les trois points $\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$, où elle coupe les trois rayons $Pm'_1 Pm'_2 Pm'_3$, sont trois points homologues des trois divisions homographiques, et parconséquent résultent de l'intersection de ces trois rayons par une seule et même courbe du troisième ordre faisant partie du faisceau. On construira cette courbe $C_3$, soit au moyen du point double P et des six points $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$, soit au moyen de quatre de ces points, du point P et de ses deux tangentes connues $Pn_1 Pn_2$.

Soit $P'$ le point de rencontre des deux droites M et $M'$. Il résulte des théorèmes ci-dessus énoncés que, si l'on joint le point P aux trois points d'un même groupe quelconque de l'involution du troisième ordre, les trois points, interceptés par la courbe $C_3$ sur ces rayons, seront sur une même ligne droite passant par le point $P'$; et que, réciproquement, toute transversale, issue du point $P'$, coupera la $C_3$ en trois points qui, vus du point P, seront projetés sur la droite L suivant un des groupes de l'involution.

On sait aussi que les angles, tels que $n'_1 Pn'_2$, qui ont leur sommet en P et dont les côtés s'appuient sur deux points conjugués de l'involution du second degré, interceptent dans la courbe $C_3$ des cordes qui passent toutes par un même point $P''$ de cette courbe, quand d'ailleurs (et c'est ici le cas) les deux tangentes du point double passent elles-mêmes par deux points conjugués de cette involution (Voir Chasles - *Note sur le principe de Correspondance* § XII - *Tome* XLI *des Comptes-Rendus de l'Académie des sciences de Paris*).

Actuellement, les cordes issues du point $P''$ correspondent anharmoniquement aux segments $n_1 n_2$, etc., et celles issues du point $P'$ correspondent aux groupes ternaires $m_1 m_2 m_3$, etc. Donc les cordes du premier système et celles du second système forment deux faisceaux homographiques qui, par les intersections mutuelles de leurs rayons homologues, engendrent une conique $C_2$. Cette courbe passe par les points $P'$, $P''$, et aussi par le point de rencontre de la droite $P'\mu_1$ ou M avec son homologue $P''P$. Il suffira donc, pour achever de la déterminer, d'en trouver deux autres points $\alpha$ et $\beta$, ce qu'on fera au moyen de deux autres systèmes de groupes correspondants tels que $m'_1 m'_2 m'_3$, $n'_1 n'_2$ et $m''_1 m''_2 m''_3$, $n''_1 n''_2$, et des cordes $P'\alpha$, $P''\alpha$ et $P'\beta$, $P''\beta$, auxquelles ces groupes donnent lieu.

La conique $C_2$ coupe la cubique $C_3$ en cinq points autres que le point $P''$; et ces cinq points étant projetés du point P sur L, donnent precisément les cinq points cherchés. Ainsi le problème est résolu.

Problème VI. *Construire géométriquement les racines de l'équation du cinquième degré*

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Qu'on prenne l'équation du cinquième degré à deux variables

$$x^3(z^2 + Az + B) + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

qui devient la proposée, quand on y fait $z = x$. Une infinité de systèmes de racines conjuguées $x$, $z$ satisfont à cette équation, et il s'agit de trouver les cinq systèmes dans lesquels les deux variables sont égales.

Supposons que les variables représentent des segments comptés sur une droite à partir d'une origine fixe.

Chaque valeur particulière du facteur $(z^2 + Az + B) = \lambda$ donne lieu à un groupe ternaire de points correspondants aux trois valeurs de $x$ qui résultent de l'équation en $x^3$; et, réciproquement, $\lambda$ correspond à chacune de ces trois valeurs indistinctement. Mais si $z'$ est une valeur que prend alors la variable $z$, $z'' = -(z' + A)$ en est une autre; car on a, identiquement:

$$\overline{-(z' + A)}^2 - (z' + A)A + B = z'^2 + Az' + B$$

et par conséquent le coefficient de $x^3$ ne change pas par cette substitution. Donc les trois valeurs de $x$ qui correspondent à une valeur de $z$, correspondent aussi toutes les trois à une autre valeur de $z$. D'ailleurs ces valeurs conjuguées de $z$ forment une série de segments en involution qui a un point double à l'infini (*Géometrie supérieure*, n.° 242 - *page* 171). Ces segments correspondent anharmoniquement à leurs pôles harmoniques, pris par rapport à un point fixe de la droite sur laquelle ils sont marqués. Donc un de ces pôles détermine un segment et par suite la valeur correspondante de $\lambda$. On en conclut que les groupes ternaires $x\ x'\ x''$ sont eux-mêmes en involution du troisième ordre, et, en outre, qu'ils correspondent anharmoniquement aux segments $z'z''$.

La construction des racines de l'équation générale du cinquième degré se trouve ainsi ramenée au problème précédent, et dépend de la construction d'une courbe à point double du troisième ordre et d'une conique passant par le point double.

*Remarque* - On pourrait résoudre le même problème, en décomposant ainsi qu'il suit l'équation du cinquième degré, savoir

$$(z + A)x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Mais il me semble peu intéressant de faire connaître cette seconde solution qui exige le tracé d'une courbe à point triple du quatrième ordre concurremment avec celui d'une conique, et qui, par ce fait même, est moins conforme à l'ésprit général des Mathématiques.

*

Problème VII. *Vingt points étant donnés arbitrairement sur un plan, former deux faisceaux générateurs de la courbe du cinquième ordre que ces points déterminent, et construire cette courbe.*

Je suppose qu'on sache résoudre cette autre question que j'ai traitée dans un *Mémoire sur la génération des courbes géométriques* inséré au tome XVI du *Journal des Savants étrangers*, page 49, savoir: « Décrire l'une des courbes du cinquième ordre qui passent, en nombre infini par 19 points donnés. » Il suffira même qu'on sache trouver, sur une droite menée par deux points connus de cette courbe, les trois autres points qui lui appartiennent, sans qu'on soit, pour cela, obligé de décrire la courbe.

Cela posé, la courbe du cinquième ordre $C_5$, que les vingt points donnés déterminent, peut être regardée comme étant la *résultante* de deux faisceaux anharmoniques, composés, l'un de coniques et l'autre de cubiques. D'après un théorème que j'ai démontré dans le Mémoire précité, la question se réduit à déterminer cinq points inconnus des bases des deux faisceaux.

Je suppose que ces cinq points soient tous affectés à la base du faisceau de cubiques. Alors les deux faisceaux générateurs peuvent, d'après une notation adoptée, être représentés symboliquement ainsi qu'il suit:

$$(a\,b\,c\quad x\,y\,z\,u\,v)\ [1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ 13\ ]$$
$$(d\,e\,f\,g)\ [1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ 13\ ],$$

$a, b, c, d, e, f, g,$ 1, 2, 3, .... 13, étant les vingt points donnés, et $x, y, z, u, v$ les cinq points inconnus qu'il faut déterminer.

Le système des deux droites $de$, $fg$ représente une conique du second faisceau, et celui des deux droites $df$, $eg$ en représente une autre. Soient $C_3$ et $C'_3$ les deux courbes du troisième ordre qui, dans le premier faisceau, correspondent anharmoniquement à ces deux coniques particulières. Si l'on parvient à les construire, elles feront connaître, par leurs intersections mutuelles, les cinq points inconnus $x, y, z, u, v$, et même le neuvième point $w$ qui est aussi commun à toutes les cubiques du faisceau. Or chacune d'elles coupe chacune des droites $de$, $fg$, $df$, $eg$, en trois points qui appartiennent aussi à la courbe du cinquième ordre $C_5$ qu'il s'agit de décrire. Ce sont ces points que nous allons trouver.

Pour cela, soient $C'_5$ et $C''_5$ deux quelconques des courbes du cinquième ordre qui passent par dix-neuf des points donnés. Chacune d'elles coupera la droite $de$ en trois points autres que $d$ et $e$, et pareillement la droite $fg$. Ces deux systèmes de trois points sur chaque droite, qui pourront, ainsi que je l'ai dit plus haut, se construire par de simples intersections de coniques, y déterminent respectivement, une involution cubi-

que dont font évidemment partie le groupe des trois points $\sigma$, $\sigma'$ $\sigma''$ interceptés sur *de*, et le groupe des trois points $\tau$, $\tau'$, $\tau''$ interceptés sur *fg* par la courbe cherchée $C_5$.

Qu'on néglige l'un des dix-neuf points déja employés, en le remplaçant par le vingtième, et que, par ce nouveau système de dix-neuf points, on fasse passer pareillement deux courbes distinctes du cinquième ordre $S'_5$, $S''_5$; on formera, sur *de* et sur *fg*, deux nouvelles involutions cubiques, dont font aussi partie, respectivement, les groupes $\sigma\,\sigma'\sigma''$ et $\tau\,\tau'\,\tau''$.

Voici donc un des cas exceptionnels mentionnés ci-dessus (théorème VI), où deux involutions cubiques sur une même droite ont un groupe de points communs, et où l'on en est informé *a priori* par la nature même de la question. Supposons qu'on sache construire ce groupe; je dirai ci-après comment on doit s'y prendre pour cela. Les neuf points $a, b, c, \sigma, \sigma', \sigma'', \tau, \tau', \tau''$ détermineront la cubique $C_3$. En considérant ensuite les deux droites *df*, *eg*, on trouvera de même six points $s, s', s'', t, t', t''$ de la cubique $C'_3$, qui passe aussi d'ailleurs par les trois points $a$, $b$, $c$. Enfin les six points d'intersection de $C_3$ et de $C'_3$ seront précisément les points cherchés $x, y, z, u, v, w$. Le problème est donc résolu; mais on voit qu'il sera nécessaire de *tracer* complétement les deux cubiques $C_3$, $C'_3$; ce à quoi il était d'ailleurs naturel de s'attendre dans une question relative aux courbes du cinquième ordre.

Les deux faisceaux générateurs de la courbe $C_5$ étant ainsi déterminés; on trouvera autant de points qu'on voudra de cette courbe, six par six, en construisant les cubiques et les coniques correspondantes, et en prenant leurs points d'intersection.

Il reste enfin à faire voir comment on peut trouver le groupe commun à deux involutions cubiques données sur une droite L, quand on sait, par d'autre considérations (comme c'est ici le cas), qu'un tel groupe existe.

Soient $m_1\,m_2\,m_3$ et $m'_1\,m'_2\,m'_3$ les deux groupes qui déterminent la première involution. Au moyen des deux groupes donnés de la seconde, on cherchera les deux groupes $m_1\,n_2\,n_3$ et $m'_1\,n'_1\,n'_1$ de cette seconde involution, qui ont en commun avec les deux premiers groupes les points $m_1$ et $m'_1$ respectivement.

Cela posé, on construira, comme il est dit aux problèmes I et II, une courbe du troisième ordre $C_3$ correspondante à la première involution et douée d'un point double P. Soit P' le point de concours commun (Problème I) des cordes interceptées par la courbe sur les faisceaux de trois droites qui joignent le point P aux trois points de chacun des groupes de l'involution. On construira pareillement la courbe du troisième ordre $C'_3$ correspondante à la seconde involution, en conservant le même point double P et le même point de concours P'. Ces deux courbes $C_3$, $C'_3$ ont en commun le point double P et les deux points $\mu_1\,\mu'_1$ interceptés par les cordes $P'\mu_1$, $P'\mu'_1$ sur les rayons $Pm_1$, $Pm'_1$. Donc elles se couperont en trois autres points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ qu'on sait construire géométriquement, sans avoir besoin de tracer les courbes

du troisième ordre. Si les deux involutions étaient quelconques, parmi les cinq points $\mu_1$, $\mu'_1$, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, il n'y en aurait pas trois en ligne droite avec le point P', puisqu'en général deux involutions du même ordre sur une droite n'ont pas de groupe commun (théorème V). Mais ici où le groupe existe, il faut au contraire que cette circostance particulière ait lieu. On remarquera donc quels sont ceux de ces trois points qui se trouverent en ligne droite avec le point P'. En les projetant du point P sur la droite L, on obtendra les trois points du groupe cherché. Ainsi la question est résolue.

Février 1859.



## SUR LA COURBURE D'UNE SÉRIE DE SURFACES ET DE LIGNES,

**PAR T. A. HIRST.**



1. Si d'un point fixe $o$, origine des coordonnées, on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangents d'une surface S donnée, leurs pieds formeront une autre surface $S_1$ qui joue un rôle important dans quelques questions de géométrie et de physique. Pour abréger le discours j'appellerai cette surface $S_1$ la *dérivée* de la surface *primitive* S, ou plutôt la dérivée *positive* pour la distinguer d'une autre surface $S_{-1}$, *derivée négative*, qui est l'enveloppe des plans menés par les points de S perpendiculairement aux rayons vecteurs partant du point fixe $o$. En prenant la dérivée positive de $S_1$ et la dérivée négative de $S_{-1}$ on obtient deux nouvelles surfaces $S_2$, $S_{-2}$, *deuxièmes dérivées* de S, et en operant de nouveau sur celles-ci, et ainsi de suite, on arrivera à la série de surfaces dérivées dont il sera question dans ce mémoire.

Quoique on rencontre assez souvent des surfaces de ce genre dans les travaux de plusieurs géomètres, il ne parait pas que leurs propriétés aient été étudiées d'une manière générale. Cependant les excellentes recherches de M. M. Tortolini et W. Roberts, qui se sont plus specialement occupés de telles surfaces et de telles courbes, nous montrent combien le sujet est riche et digne d'être encore étudié.

Dans les mémoires de M. Tortolini il s'agit, le plus souvent, des problémes de rectification, de quadrature, et de cubature par rapport à quelques unes des dérivées centrales des surfaces et des lignes du second ordre; on y trouve aussi, comme nous verrons plus tard, les équations de plusieurs de ces dérivées. Des problèmes de même genre sont traités aussi dans les mémoires de M. W. Roberts, mais avec plus de généralité; on y trouve introduit pour la première fois la série entière de lignes dérivées, l'expression générale pour l'élément de la dérivée de rang $n$, et plusieurs applications intéressantes et remarquables. Du reste c'est à ce géomètre que j'emprunte les noms de dérivées positives et négatives, lesquels comme on verra, sont basés sur des propriétés analogues.

2. L'objet principal de ce mémoire est d'examiner la courbure aux points correspondants de toutes les dérivées d'une surface quelconque. Mais pour le mieux faire j'ai cru devoir considérer quelques propriétés générales tant des surfaces que

des lignes planes dérivées: c'est ce qu'on trouvera dans la première partie où je développe surtout les relations intimes qui existent entre les surfaces dérivées, les surfaces réciproques polaires, et les surfaces inverses, ou aux rayons vecteurs réciproques. Dans la seconde partie je profite des relations analogues pour étudier la courbure des lignes planes dérivées : parmi d'autres choses j'y arrive facilement à quelques résultats de M. W. Roberts. Enfin dans la troisième partie j'applique la même méthode aux surfaces, j'exprime, par exemple, l'élément de surface d'une dérivée quelconque, et les éléments qui servent à définir sa courbure, au moyen des éléments correspondants de la surface primitive.

## I.

### *Propriétés générales des surfaces et des lignes dérivées.*

3. En étudiant les surfaces dérivées il sera utile de considérer en même temps deux autres espèces de surfaces, bien connues, qui ont des rapports très-intimes avec les premières; ce sont des *surfaces inverses* et des *réciproques polaires*, toutes les deux prises par rapport à une même sphère $(k)$ décrite autour de l'origine avec un rayon arbitraire $k$. En effet si de l'origine $o$ on abaisse la perpendiculaire $om_1$, sur le plan tangent au point $m$ d'une surface quelconque S, on obtiendra le point $m_1$ qui, sur la première dérivée positive $S_1$, correspond au point $m$ de la surface primitive S. Si ensuite on prolonge, du côté de $m_1$, cette perpendiculaire $om_1$, jusqu'à un point $m'$ tel que $om_1 . om' = k^2$, le lieu $S'$ de ce nouveau point $m'$ sera, évidemment, et la surface inverse de S, et la réciproque polaire de S. On peut donc dire que: *la première dérivée positive d'une surface donnée est l'inverse de sa réciproque polaire,* et, en observant que S est la dérivée négative de $S_1$, que : *la première dérivée négative d'une surface donnée est la réciproque polaire de sa surface inverse.*

En combinant donc les propriétés bien connues des surfaces inverses et des réciproques polaires on arrivera à celles des surfaces dérivées; parceque pour l'opération géométrique unique qui consiste à prendre la dérivée on peut toujours substituer deux autres opérations appliquées successivement dans l'un ou dans l'autre ordre selon que la dérivée en question doit être positive ou négative. Voilà la marche que nous allons suivre, et outre qu'elle fera connaître simultanément les propriétés des trois genres de surfaces et de courbes si étroitement liées entres elles, elle sera souvent plus simple que la méthode directe : parceque chacune des opérations ainsi substituées jouit de la propriété précieuse d'être réciproque, c'est-à-dire de ramener à la surface primitive en y étant appliquée deux fois de suite.

4. Si d'une surface quelconque et de sa derivée on prend, toujours par rapport à la même origine, les réciproques polaires, on obtiendra deux nouvelles surfaces dé-

rivées. En effet si $S'$ est la réciproque polaire de $S$ elle est nécessairement l'inverse de $S_1$, première dérivée positive de $S$; par conséquent $S'$ est la dérivée positive de la réciproque polaire de $S_1$, surface qu'il faut donc désigner par $S'_{-1}$. En observant que la nature de la dérivée est changée en passant aux réciproques polaires on verra facilement que : *si de chaque surface* $S_m$ *de la série*

$$S_{-n} \ldots\ldots S_{-1},\ S,\ S_1,\ \ldots\ldots S_n \qquad \text{(A)}$$

*de surfaces dérivées on prend la réciproque polaire* $S'_{-m}$ *on obtiendra une nouvelle série de surfaces dérivées*

$$S'_n \ldots\ldots S'_1,\ S',\ S'_{-1},\ \ldots\ldots S'_{-n}, \qquad \text{(B)}$$

*rangées dans un ordre inverse par rapport à celui des surfaces de la première série.*

Si au lieu de prendre les réciproques polaires on prend les surfaces respectivement inverses de celles de la série (A) on arrivera évidemment à la même série (B), sans que l'ordre dans lequel ses termes se suivent soit changé ; car, en général, $S_m$ est l'inverse de $S'_{-(m-1)}$. Les deux séries sont donc vraiment conjuguées, et par elles on voit sans peine la liaison qui existe entre les dérivées positives et négatives d'une surface quelconque; liaison qu'on peut exprimer de plusieurs manières. Par exemple pour des valeurs positives ou négatives de $n$ on peut dire que :

*La réciproque polaire de la dérivée du rang* n *d'une surface donnée* S *est la dérivée du rang* — n *de sa réciproque polaire ou, ce qui revient au même, la dérivée du rang* — (n+1) *de la surface inverse de* S. On peut dire aussi que :

*L'inverse de la dérivée du rang* n *d'une surface donnée* S *est la dérivée du rang* — n *de sa surface inverse ou, ce qui est la même chose, la dérivée du rang* —(n—1) *de la réciproque polaire de* S.

5. Lorsque une surface a pour réciproque polaire, ou pour inverse, une surface du même ordre, ou bien une surface qui diffère de la première en grandeur et en position seulement, la relation entre les dérivées positives et négatives devient encore plus étroite.

Pour avoir un exemple soit S une surface de second ordre; sa réciproque polaire $S'$ le sera aussi et leurs dérivées $S_n$, $S'_n$ du rang $n$ seront également des surfaces du même ordre. Mais nous avons vu que $S'_n$ est la réciproque polaire de $S_{-n}$, et en même temps l'inverse de $S_{-(n-1)}$, en sorte que:

*Entre les dérivées positives et négatives de même rang d'une surface de second ordre la relation est telle que l'une est la réciproque polaire d'une surface de même ordre que l'autre : et entre une dérivée positive quelconque et la dérivée négative d'un rang inférieur de l'unité la relation est telle que l'une est l'inverse d'une surface de même ordre que l'autre.*

Les propriétés géométriques des dérivées négatives d'une surface de second ordre

ne sont donc que les réciproques de celles des dérivées positives de même rang, et les inverses de celles des dérivées positives d'un rang supérieur d'une unité. En somme les dérivées positives étant connues les dérivées négatives le sont aussi, et réciproquement. Par exemple étant donnée l'équation

$$S_n = F(x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ \ldots\ l) = 0$$

de la dérivée du rang $n$, positif ou négatif, d'une surface de second ordre S, dont l'équation générale contient les dix coefficients $a$, $b$, ... $l$, on peut trouver facilement l'équation de la dérivée dont le rang est marqué par $-(n-1)$. En effet soit $a'$, $b'$, .... $l'$ des coefficients qui corresponaent à $a$, $b$, .... $l$ dans l'équation de S', réciproque polaire de S par rapport à la sphère de rayon $k$ autour de l'origine (¹); l'équation de la dérivée du rang $n$ de S' sera évidemment

$$S'_n = F(x,\ y,\ z,\ a',\ b',\ \ldots\ l') = 0.$$

De cette équation on passe sans peine à celle de $S_{-(n-1)}$, qui est l'inverse de $S'_n$, en remplaçant $x$, $y$, $z$ par $k^2\frac{x}{r^2}$, $k^2\frac{y}{r^2}$, $k^2\frac{z}{r^2}$, où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mais le rayon $k$ étant arbitraire doit évidemment disparaitre de cette équation finale; donc en le supposant dès le commencement égal à l'unité, nous aurons pour la dérivée du rang $-(n-1)$ de la surface S l'équation

$$S_{-(n-1)} = F\left(\frac{x}{r^2},\ \frac{y}{r^2},\ \frac{z}{r^2},\ a',\ b',\ \ldots\ l'\right) = 0,$$

équation dont le degré est, en général, le double de celui de $S_n = 0$.

En théorie il est aussi facile de trouver l'équation de $S_{-n}$ étant donnée celle de $S_n$; pour cela il faudrait passer de l'équation de $S'_n$ à celle de sa réciproque polaire. Mais, comme on sait, les difficultés pratiquées de ce passage augmentent beaucoup avec l'ordre de la surface $S'_n$.

6. Comme application considérons les dérivées centrales de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \text{(S)}$$

Remplaçant $a$, $b$, $c$ par $\frac{k^2}{a}$, $\frac{k^2}{b}$, $\frac{k^2}{c}$ on a pour l'équation de l'ellipsoïde S', réciproque polaire de S,

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = k^4, \qquad \text{(S')}$$

(1) Voir la Note II à la fin du Mémoire.

et en mettant dans celle-ci $k^2\frac{x}{r^2}$, $k^2\frac{y}{r^2}$, $k^2\frac{z}{r^2}$ au lieu de $x, y, z$, on obtient l'équation

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=r^4 \qquad (S_1)$$

de la première dérivée positive de S qui, comme on sait, est la surface d'élasticité de Fresnel. D'un autre côté l'inverse de l'ellipsoïde primitive S, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{r^4}{k^4}, \qquad (S'_1)$$

est évidemment une autre surface d'élasticité; la réciproque polaire de celle-ci sera la première dérivée négative $S_{-1}$. Dans une communication faite à la Société royale de Londres le 22 Février, 1858, M. Cayley annonce la découverte de l'équation de cette dérivée $S_{-1}$, qui selon lui est déja du 10$^{me}$ ordre. Jusqu'ici les premières dérivées positives et négatives, sont, je crois, les seules dérivées centrales de l'ellipsoïde dont les équations aient été trouvées; mais selon les principes du n.º précédent il est facile d'en ajouter une troisième équation. En effet si dans l'équation $S_{-1}=0$ de M. Cayley on remplace $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ respectivement par $\frac{x}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{z}{r^2}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ elle deviendra l'équation de la deuxième dérivée positive $S_2$; une surface, probablement, du 20$^{me}$ ordre.

7. Les principes des n.$^{os}$ 4 et 5 s'appliquent évidemment aux dérivées des lignes planes. Quant aux dérivées centrales de l'ellipse, les équations de la première négative et de la deuxième positive ont été trouvées séparément par M. Tortolini depuis plusieurs années; pour y arriver il a fallu des artifices d'élimination très ingénieux.

Pour la première dérivée négative, la courbe de Talbot, M. Tortolini trouve cette équation du 6$^{me}$ degré: (1)

$$\begin{aligned}&[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3\\ &=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2,\end{aligned} \qquad (S_{-1})$$

l'ellipse primitive ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (S)$$

Selon le n.º 5 donc la deuxième dérivée positive $S_2$ est une ligne du 12$^{me}$ ordre

(1) Voir la *Raccolta Scientifica*, Num. 6, 1846; ou le *Journal de Crelle*, t. 33, p. 93, 1846; ou enfin les *Nouvelles Annales de Mathématiques de Terquem*, t. 5, pag. 365, 1846.

*

dont l'équation se deduit de $(S_{-1})$ en mettant $\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ au lieu de $x, y, a, b$. Si après cette substitution on multiplie partout par $r^{12} a^{12} b^{12}$ on obtiendra

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)r^4-3a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)]^3 \qquad (S_2)$$
$$=r^4[9a^2b^4(2a^2-b^2)x^2+9a^4b^2(2b^2-a^2)y^2-4(a^2+b^2)(2b^2-a^2)(2a^2-b^2)r^4]^2$$

L'équation de cette courbe que M. Tortolini a trouvée directement [1] a une forme moins explicite et parait être du $16^{me}$ ordre. Mais en la regardant attentivement on trouvera qu'elle contient le facteur $r^2$ ce qui reduit le degré au $14^{me}$; ensuite, comme l'auteur lui-même observe, les termes de la plus haute dimension se détruisent, en sorte que, toutes les puissances étant paires, l'équation qui reste est du $12^{me}$ degré et susceptible d'être mise sous la forme $(S_2)$.

8. Des simplifications semblables ont lieu toutes les fois que la courbe ou la surface primitive coïncide avec son inverse, ou ne diffère de celle-ci qu'en grandeur et en position.

Par exemple l'inverse d'une circonférence S étant une autre circonférence [2], la dérivée $S_{-n}$ est l'inverse d'une courbe $S'_n$ de même espèce que $S_n$, et la réciproque polaire d'une autre courbe du même ordre que $S_{n-1}$. En effet la première dérivée négative d'une circonférence S est, comme on sait, une conique concentrique dont un des foyers coïncide avec l'origine; la première dérivée positive, le *limaçon* de Pascal, est l'inverse d'une autre conique dont le foyer et l'axe focal coïncident, respectivement, avec le foyer et l'axe focal de $S_{-1}$. Si la circonférence S se réduit à un point P, son inverse se réduira à un autre point P' de la droite $o$P. Les premières dérivées négatives $P_{-1}$, $P'_{-1}$ sont des droites menées respectivement par les points P, P' perpendiculaires à la droite $o$PP'; les dérivées secondes $P_{-2}$, $P'_{-2}$ sont des paraboles ayant l'origine pour foyer commun, et les points P, P' pour sommets, et ainsi de suite. Quant aux dérivées positives, les premières $P_1$, $P'_1$ sont respectivement les inverses des droites $P'_{-1}$, $P_{-1}$ ou, ce qui est la même chose, les réciproques polaires des paraboles $P'_{-2}$, $P_2$; c'est-à-dire elles sont des circonférences ayant pour diamètres les droites $o$P, $o$P'. Les dérivées secondes $P_2$, $P'_2$ sont, au contraire, les inverses des paraboles $P'_{-2}$, $P_{-2}$ et par conséquent des cardioïdes ayant l'origine pour point de rebroussement commun et passant, respectivement, par P et P'.

Les surfaces dérivées d'une sphère et d'un point, dont il sera question plus tard, s'obtiennent évidemment en faisant tourner ces courbes autour de leur axe de symétrie commun.

---

(1) Voir le *Giornale Arcadico*, t. CV, 1845.
(2) Voir la Note I à la fin du Mémoire.

Il y a aussi des courbes (et des surfaces) qui coïncident avec leurs inverses. Telles sont, par exemple, toutes les courbes dont l'équation polaire a la forme

$$r^2 + r f(\theta) + k^2 = 0$$

où $f(\theta)$ est une fonction quelconque de l'angle $\theta$, et $k$ est une constante. Pour ces courbes les dérivées, positives et négatives, du même rang sont simplement des courbes inverses : les ovales de Descartes nous en présentent un cas particulier.

9. Reprenons une surface quelconque S et sa réciproque polaire S'. Soient $m$ et $m'$ deux points correspondants de ces surfaces; on sait que le plan tangent en $m$ est perpendiculaire au rayon recteur $om'$, et *vice versa* le plan qui touche S' au point $m'$ est perpendiculaire au rayon recteur $om$ ; en d'autres termes les normales en $m$ et $m'$ sont respectivement parallèles aux rayons vecteurs qui aboutissent en $m'$ et $m$. Les deux normales correspondantes sont donc situées dans le *plan des rayons vecteurs* et chacune d'elles fait avec son rayon vecteur un angle aigu $\psi$ égal à l'angle de ces rayons.

De même en considérant la surface S' et son inverse $S_1$, première dérivée positive de S, on sait que les normales aux points correspondants $m'$ et $m_1$ sont situées avec le rayon vecteur commun dans un même plan ; qu'elles sont situées de part et d'autre de ce rayon et forment avec lui le même angle $\psi$ (1).

En réunissant ces propriétés on déduit sans peine celles, déjà connues, des surfaces dérivées S et $S_1$ : c'est-à-dire 1.° les normales aux points correspondants $m$ et $m_1$ sont situées avec leur rayons vecteurs $om$, $om_1$ dans un même plan, 2.° l'angle que chacune des deux normales fait avec son rayon vecteur est égal à l'angle $\psi$ de ces deux rayons 3.° ces normales sont situées d'un *même* côté par rapport aux rayons vecteurs, en sorte que la normale en $m_1$ de la dérivée positive divise en parties égales le rayon vecteur $om$ qui aboutit au point correspondant de la surface primitive. Il est facile à présent d'étendre ces propriétés à toute la série

$$S_{-n} \ldots\ldots S_{-1}\,,\ S\,,\ S_1\,,\ \ldots\ldots\ S_n$$

de surfaces dérivées. En effet : 1.° les rayons vecteurs aux points correspondants de ces surfaces sont tous situés dans un même plan qui contient aussi la suite de normales correspondantes, 2.° l'angle $\psi$ de deux rayons vecteurs consécutifs est constant et égal à l'angle aigu formé par chaque normale et le rayon vecteur qui aboutit au même point, 3.° la normale à chaque surface $S_n$ divise en parties égales le rayon vecteur précédent, c'est-à-dire le rayon vecteur qui aboutit au point correspondant de la dérivée $S_{n-1}$, 4.° les plans tangents aux points correspondants sont tous perpendiculaires au plan des rayons vecteurs ; lequel est ainsi découpé par une suite de lignes droites qui, avec les rayons vecteurs, forment une suite de triangles rectan-

(1) Voir la Note I à la fin du Mémoire.

gles, semblables; 5° chaque rayon vecteur $r_n$ étant hypothénuse d'un triangle et côté du triangle précédent on a évidemment les relations

$$r_n = r_{n-1} \cos \psi = r_{n-2} \cos^2 \psi \ldots\ldots = r \cos^n \psi \qquad (1)$$

10. Si l'angle $\psi$ s'évanouit tous les rayons vecteurs correspondants auront la même direction et la même longueur; c'est-à-dire que *les normales abaissées de l'origine sur la surface primitive sont communes à toutes les surfaces dérivées, chacune desquelles passe par leurs pieds.*

On peut démontrer aussi que les deux plans des sections principales de la surface primitive menés par chacune des normales abaissées de l'origine sont aussi communs à toutes les surfaces dérivées. En effet soit $m$ le pied d'une quelconque de ces normales, et par conséquent un point sur chaque dérivée; soit $m'$ un point de la surface primitive S infiniment voisin de $m$ et situé avec lui sur une ligne de courbure. La normale en $m'$ rencontrera la normale $om$; par conséquent le plan déterminé par le rayon vecteur $om'$ et la normale en $m'$, lequel comme nous savons contient tous les rayons vecteurs qui correspondent à $om'$, ce plan dis-je passe par la normale $om$ commune à toutes les surfaces dérivées. Mais le plan des rayons vecteurs correspondants contient aussi les normales aux points $m'_1$, $m'_2 \ldots$ qui correspondent sur les dérivées au point $m'$ de S, en sorte que toutes ces normales rencontreront nécessairement la normale unique $om$, et chacun des éléments $mm'_1$, $mm'_2 \ldots$ sur les dérivées consécutives $S_1$, $S_2 \ldots$ appartiendra à une ligne de courbure. Il en résulte que pour chaque dérivée le plan des rayons vecteurs correspondants $om'$, $om'_1$, $om'_2 \ldots$ est celui d'une section principale au point $m$.

Il s'ensuit encore que, pour des points infiniment voisins de $m$, les sections principales des surfaces dérivées forment deux séries de courbes dérivées. Plus tard ces résultats seront vérifiés par le calcul qui en même temps donnera pour chaque dérivée les valeurs des rayons de courbure des sections principales au point $m$.

11. Si $\psi$ est un angle droit $r_n = r \cos^n \psi$ sera nul ou infini selon que $n$ est positive ou négative. Ce cas arrivera quand le plan tangent au point $m$ de la surface S passera par l'origine; alors tous les points correspondants des dérivées positives $S_1$, $S_2 \ldots$ coïncideront avec l'origine, tandis que tous ceux des dérivées négatives $S_{-1}$, $S_{-2} \ldots$ seront à l'infini. Toutes les dérivées $S_{2i}$, positives et négatives, de rang pair auront le même plan tangent aux points qui correspondent à $m$, et les dérivées $S_{2i+1}$ de rang impair seront touchées aux points correspondants par un même plan perpendiculaire au premier et au rayon vecteur $om$.

De ces considérations il résulte, que C designant le cône circonscrit à la surface primitive S et ayant l'origine pour sommet, parmi les dérivées positives celles de rang pair sont touchées à l'origine par le cône C, tandis que celles de rang impair

y sont touchées par un autre cône $C'$ supplémentaire à C. D'un autre côté les dérivées négatives de rang pair et celles de rang impair auront respectivement ces mêmes cônes C et $C'$ pour cônes asymptotiques. Si le cône C devient un plan le cône supplémentaire $C'$ se réduira à une droite avec laquelle les surfaces dérivées se confondront à l'origine ou à l'infini.

Si la surface primitive elle-même a le cône C pour cône tangent à l'origine les propriétés des dérivées positives resteront les mêmes; mais il peut arriver que parmi les dérivées négatives quelques unes soient touchées à l'origine et d'autres à l'infini par ces cônes C et $C'$; tandis qu'il y en aura une pour laquelle la courbe de contact avec C ou $C'$ peut être à une distance finie de l'origine. Mais il est hors de notre objet d'entrer dans ces détails; pour cet objet les propriétés des surfaces dérivées dejà indiquées suffiront. Observons seulement que ces propriétés, avec des modifications évidentes, appartiennent aussi aux dérivées des courbes planes.

## II.

### *Sur la courbure des dérivées d'une courbe plane.*

12. Il serait facile de déterminer directement la courbure des lignes dérivées mais pour suivre la marche indiquée au n.° 3 nous allons assujettir les lignes inverses et réciproques polaires à une étude directe; ensuite nous en deduirons la courbure des lignes dérivées.

Nous partons de ce théorème : *Si de deux courbes (ou surfaces)* S *et* Σ, *osculatrices en un point* m, *on prend les inverses, ou les réciproques polaires, on obtiendra deux nouvelles courbes (ou surfaces)* $S'$ *et* $\Sigma'$ *également osculatrices au point correspondant* $m'$. Nous supprimons la démonstration, qui du reste n'offre pas de difficulté, en observant que du n.° 3 il résulte comme corollaire que *les dérivées* $S_1$ *et* $\Sigma_1$ *sont aussi osculatrices au point correspondant* $m_1$.

13. Soit $S_1$ et $S'$ deux lignes inverses : on sait que leurs cercles osculateurs aux points correspondants $m_1$ et $m'$ sont des circonférences inverses, et par conséquent que les centres $c_1$ et $c'$ de courbure sont en ligne droite avec l'origine $o$ [1]. Cette ligne $oc_1c'$ des centres est une transversale du triangle isocèle formé par le rayon vecteur $om_1m'$ et les normales $m_1c_1$, $m'c'$; triangle qui a $m_1m'$ pour base, et $\psi$ pour chacun des angles égaux. Désignons par $\rho_1$ et $\rho'$ les rayons de courbure aux points $m_1$ et $m'$ et, quant à leurs signes, convenons toujours de considérer *chaque rayon de courbure comme positif ou négatif selon que l'origine et le centre de courbure sont aux côtés opposés ou au même côté de la tangente.* Cela posé il est clair que les projections des lignes des centres $oc_1$, $oc'$ sur la direction du rayon vecteur

(1) Voir la Note I.

auront pour valeurs

$$r_1 + \rho_1 \cos\psi\,, \qquad r' + \rho' \cos\psi\,,$$

où les rayons vecteurs $r_1$, $r'$ sont toujours positifs, pendant que chaque projection est positive ou négative selon qu'elle tombe au côté positif ou négatif de l'origine. Le rapport entre ces projections est évidemment égal, au signe près, au rapport entres les rayons de courbure $\rho_1$, $\rho'$, et si on se rappelle que, quand $c_1$ et $c'$ sont d'un même côté de l'origine, les projections ont le même signe et les rayons de courbure des signes contraires; tandis que, quand l'origine se trouve entre les centres $c_1$, $c'$, ce sont les projections qui diffèrent de signes et non pas les rayons de courbure, on verra que dans tous les cas

$$\frac{r_1 + \rho_1 \cos\psi}{r' + \rho' \cos\psi} = -\frac{\rho_1}{\rho'}\,;$$

relation qu'il sera commode d'écrire ainsi:

$$\frac{r_1}{\mu_1 \rho_1} + \frac{r'}{\mu' \rho'} + 2 = 0\,, \qquad (2)$$

où pour abréger $\mu_1 = \cos\psi$.

14. Passons maintenant à considérer deux lignes S et S' réciproques polaires. On sait qu'en général on peut trouver une conique $\Sigma$, ayant l'origine pour centre, qui aura un contact de second ordre avec S au point $m$. Cela étant le théorème du n.° 12 fait voir que la conique $\Sigma'$, réciproque polaire de $\Sigma$, sera osculatrice à S' au point correspondant $m'$. Il suffit donc de chercher la relation entre les rayons de courbure $\rho$, $\rho'$ aux points correspondants des coniques polaires $\Sigma$ et $\Sigma'$. Admettons pour fixer les idées que ces coniques, qui sont concentriques et toujours du même espéce [1], soient des ellipses et soient $2\delta$, $2\delta'$ les diamètres de $\Sigma$, $\Sigma'$ conjugués respectivement aux diamètres $2r$, $2r'$. On voit sans peine, d'une part que l'angle des demi-diamètres $\delta$, $\delta'$ est égal à l'angle $\psi$ des rayons vecteurs, et d'autre part que les extremités de $\delta$, $\delta'$ sont des points correspondants des coniques $\Sigma$, $\Sigma'$: car $\delta$ et $\delta'$ sont respectivement, perpendiculaires à $r'$ et $r$, et les tangentes aux extremités de $\delta$ et $\delta'$ sont respectivement perpendiculaires à $\delta'$ et $\delta$. Mais entre les rayons vecteurs de chaque paire de point correspondants on a cette relation très-simple: chaque rayon vecteur est en raison inverse de la projection sur lui du rayon vecteur correspondant, donc

$$rr'\mu_1 = \delta\delta'\mu_1 = k^2 = \text{constante},$$

d'où on tire

$$rr' = \delta\delta'\,.$$

(1) Voir la Note II.

Cette équation, au moyen des relations bien connues

$$-\rho = \frac{\delta^2}{\mu_1 r}, \qquad -\rho' = \frac{\delta'^2}{\mu_1 r'},$$

donne immédiatement

$$\frac{r}{\mu_1 \rho} \cdot \frac{r'}{\mu_1 \rho'} = 1 \qquad (3)$$

15. Pour avoir la relation entre les rayons de courbure $\rho$, $\rho_1$ aux points correspondants de la ligne S et de sa dérivée positive $S_1$ il suffit, selon le principe du n.° 3, d'identifier les courbes S' des n.$^{os}$. 13 et 14; c'est-à-dire de chasser, de l'équation (2), le rapport $\frac{r'}{\mu_1 \rho'}$ au moyen de sa valeur donnée par l'équation (3), ce qui donne

$$\frac{r_1}{\mu_1 \rho_1} + \frac{\mu_1 \rho}{r} + 2 = 0; \qquad (4)$$

relation qui, pour les dérivées consécutives $S_n$, $S_{n-1}$, devient

$$\frac{r_n}{\mu_1 \rho_n} + \frac{\mu_1 \rho_{n-1}}{r_{n-1}} + 2 = 0\,. \qquad (5)$$

16. Soit $\theta_n$ l'angle que fait le rayon vecteur $r_n$ avec un axe fixe quelconque, et $s_n$ l'arc de la dérivée $S_n$ compté d'un point fixe jusqu'au point $m_n$, où aboutit le rayon vecteur $r_n$ de manière à croître avec $\theta_n$ : on aura évidemment

$$\mu_1 ds_n = r_n\, d\theta_n\,. \qquad (6)$$

D'un autre côté en se rappelant que l'angle infinimment petit $d\theta_{n+1}$ de deux rayons vecteurs consécutifs de la dérivée $S_{n+1}$ est égal, au signe près, à l'angle des normales consécutives au point correspondant de $S_n$ on vérifie facilement que

$$\frac{ds_n}{d\theta_{n+1}} = -\rho_n\,;$$

équation qui au moyen de la dernière devient

$$\frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n} = -\frac{r_n}{\mu_1 \rho_n}, \qquad (7)$$

et ainsi donne la signification géométrique du rapport entre le rayon recteur $r_n$ et la projection sur lui du rayon de courbure $\rho_n$. Au moyen de (7) la relation (5) se transforme en

$$d\theta_{n+1} - 2d\theta_n + d\theta_{n-1} = 0; \qquad (8)$$

équation qui, par sommation, s'applique aux arcs finis correspondants de trois dérivées consécutives, et du reste est très-facile à obtenir directement; en sorte que nous

aurions pu la prendre pour point de départ et au moyen de (7) obtenir de suite la relation (5) : mais pour les raisons indiquées au n.° 3, nous avons choisi une autre marche.

17. Pour les dérivées positives de S on a donc les $n-1$ équations

$$d\theta_n - 2d\theta_{n-1} + d\theta_{n-2} = 0 ,$$
$$d\theta_{n-1} - 2d\theta_{n-2} + d\theta_{n-3} = 0 ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d\theta_2 - 2d\theta_1 + d\theta = 0 ;$$

lesquelles, multipliées respectivement par les facteurs 1, 2, .... $n-1$, donnent pour somme

$$d\theta_n + [(n-2) - 2(n-1)]d\theta_1 + (n-1)\,d\theta = 0 ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$d\theta_n = n d\theta_1 - (n-1)d\theta ,$$

ou enfin, par l'équation (7),

$$-d\theta_n = \left(n\frac{r}{\mu_1\rho} + n - 1\right)d\theta. \qquad (9)$$

En mettant ici pour $d\theta_n$, $d\theta$ leurs valeurs tirées de l'équation (6) on obtient

$$-ds_n = \mu_1^n\left(n\frac{r}{\mu_1\rho} + n - 1\right)ds; \qquad (10)$$

expression qui se réduit à celle de M. W. Roberts déjà citée au n.° 1. [1]. Enfin au moyen des formules (7) et (9) on a

$$-\frac{r_n}{\mu_1\rho_n} = \frac{n + (n+1)\dfrac{r}{\mu_1\rho}}{n - 1 + n\dfrac{r}{\mu_1\rho}} \qquad (11)$$

Ces trois formules ont été déduites en supposant que $n$ soit un entier *positif*, mais elles sont vraies aussi pour des valeurs *négatives* de $n$ si toutefois on convient de representer par $r_{-n}$, $s_{-n}$, $\rho_{-n}$ les quantités qui, pour la dérivée négative $S_{-n}$, correspondent à $r$, $s$, $\rho$ de la courbe primitive S. C'est ce qu'on peut démontrer facilement de plusieurs manières, et entre d'autres au moyen du théorème donné au n.° 4, qui fait voir que si $S'$ est l'inverse de S, l'inverse de $S_n$ sera $S'_{-n}$. En

(1) *Journal de Mathématiques*, t. X, p. 178; 1845. En 1843 M. Roberts avait déjà communiqué les resultats de ce mémoire à l'Academie royale d'Irlande; un extrait de sa communication se trouve dans le *Philosophical Magazine*, t. 23, p. 140; 1843.

effet en passant des lignes S, $S_n$ à leurs inverses S', $S'_{-n}$ on a évidemment les égalités $d\theta = d\theta'$, $d\theta_n = d\theta'_{-n}$ et, selon l'équation (2), la relation

$$\frac{r}{\mu_1 \rho} = - \frac{r'}{\mu_1 \rho'} - 2 ;$$

en sorte que par substitution l'équation (9) devient, en supprimant les accents,

$$- d\theta_{-n} = \left(- n \frac{r}{\mu_1 \rho} - n - 1\right) d\theta$$

qui ne diffère de (9) que par le signe de $n$. Quant aux formules (10), (11) il n'est pas nécessaire de répéter cette démonstration, car elles sont déduites de l'équation (9), au moyen des formules (6) et (7) lesquelles sont évidemment générales.

18. Les trois dernières formules prennent une forme quelque fois plus commode en y indroduisant *le rapport*

$$\varepsilon_n = \frac{- \mu_1 \rho_n}{r_n + \mu_1 \rho_n}$$

*des segments dans lesquels le rayon vecteur est partagé en projetant sur lui le centre de courbure*, rapport qui est positif ou négatif selon que le rayon vecteur est ainsi divisé intérieurement ou extérieurement. Alors on aura pour chaque valeur entière, positive ou négative, de $n$ les formules simples

$$\varepsilon_n = n + \varepsilon , \quad d\theta_n = \frac{n + \varepsilon}{\varepsilon} d\theta , \quad ds_n = \frac{n + \varepsilon}{\varepsilon} \mu_1^n \, ds , \qquad (12)$$

dont les deux dernières donnent

$$\frac{d\theta_n}{\varepsilon_n} = \frac{d\theta_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} \cdots\cdots = \frac{d\theta}{\varepsilon} = - d\psi , \qquad (13)$$

$$\frac{ds_n}{\varepsilon_n r_n} = \frac{ds_{n-1}}{\varepsilon_{n-1} r_{n-1}} \cdots\cdots = \frac{ds}{\varepsilon r} = - \frac{d\psi}{\mu_1} ; \qquad (14)$$

car dans l'équation (13) le premier rapport est évidemment égal a $\frac{d\theta_n - d\theta}{\varepsilon_n - \varepsilon}$ ou $\frac{d\theta_n - d\theta}{n}$, et par le n.º 9, $\frac{\theta - \theta_n}{n} = \psi$.

A ces formules nous en ajoutons une quatrième, très-utile pour la rectification des lignes dérivées. Désignons, en général, par $t_n$ la distance sur la tangente entre le point de contact et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine; en d'autres termes la distance entre deux points correspondants des dérivées consécutives $S_n$, $S_{n+1}$. On a évidemment

*

$$t_n^2 = r_n^2 - r_{n+1}^2 ,$$

$$dt_n = \frac{r_n}{t_n} dr_n - \frac{r_{n+1}}{t_n} dr_{n+1} = \frac{dr_n}{\sin\psi} - \frac{dr_{n+1}}{\tan\psi}.$$

En mettant ici pour $dr_n$, $dr_{n+1}$ leurs valeurs $ds_n \sin\psi$, $ds_{n+1}\sin\psi$ on obtient

$$ds_n - dt_n = \mu_1\, ds_{n+1} , \qquad (15)$$

relation entre l'accroissement de la différence $s_n - t_n$ et celui de l'arc $s_{n+1}$ qu'il est facile à demontrer directement; on lui donne une autre forme en observant que, selon le formule (14),

$$\frac{ds_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}\, r_{n+1}} = \frac{ds_{n+2}}{\varepsilon_{n+2}\, r_{n+2}} = \frac{ds_{n+2}}{\varepsilon_{n+2}\, \mu_1\, r_{n+1}},$$

en sorte que (15) devient

$$ds_n - dt_u = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}} ds_{n+2} . \qquad (16)$$

19. Sans entrer dans une discussion complète de ces formules en voici quelques conséquences. Si le rapport $\varepsilon$ est constant pour tous les points de la ligne primitive S toutes ses dérivées jouiront de la même propriété; c'est ce qui est évident d'après l'équation (12). Mais dans cette hypothèse on peut intégrer l'équation (13) et en deduire

$$\frac{\theta_n}{\varepsilon_u} = \frac{\theta_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} \cdots\cdots = \frac{\theta}{\varepsilon} = -\psi \qquad (17)$$

pourvu qu'on prenne pour axe polaire une des normales abaissées de l'origine qui, selon le n.° 10, sont communes à toutes les dérivées; car alors les angles $\theta_n$, $\theta_{n-1}$ . . . . . $\theta$, $\psi$ doivent s'évanouir ensemble. De même si on compte les arcs $s_n$, $s_{n-1}$ .... à partir du point de cet axe commun à toutes les dérivées on tire de (16) cette équation remarquable

$$s_n - t_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}} s_{n+2} \qquad (18)$$

20. L'équation polaire de toutes les courbes qui jouissent de ces propriétés se déduit facilement de l'équation (17) qui n'est autre chose que leur équation différentielle. En effet on en tire, pour une valeur quelconque de $n$,

$$-\tan\frac{\theta_n}{\varepsilon_n} = \frac{dr_n}{r_n\, d\theta_n} = \tan\psi.$$

En intégrant on trouve

$$r_n = a \cos^{\varepsilon_n} \frac{\theta}{\varepsilon_n} = a \cos^{n+\varepsilon} \frac{\theta}{n+\varepsilon} \qquad (E_n)$$

pour l'équation de la dérivée du rang $n$ de la ligne representée par

$$r = a \cos^{\varepsilon} \frac{\theta}{\varepsilon}; \qquad (E)$$

la constante arbitraire $a$ est la même dans ces équations parceque, selon le n.º 10, chaque dérivée $E_n$ doit passer par un même point de l'axe $\theta = 0$.

Les courbes (E) que nous venons de trouver par la condition $\varepsilon =$ *constante* appartiennent à une classe bien connue et importante. Leurs courbes inverses et réciproques polaires appartiennent évidemment à la même classe qui renferme, comme deux cas particuliers, la suite des dérivées d'un point (c'est le cas qui répond à une valeur entière de $\varepsilon_n$), et la suite des dérivées d'une hyperbole équilatère ($\varepsilon = -\frac{1}{2}$) dont la première positive est, comme on sait, la *lemniscate de Bernoulli* ($\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$). En général chaque courbe ($E_n$) est symétrique par rapport à l'axe polaire, qu'elle coupe orthogonalement, et ses branches se rencontrent à l'origine ou s'étendent à l'infini selon que $\varepsilon_n$ est positive ou negative.

Si $\varepsilon$ est positive non seulement la courbe primitive E mais chacune de ses dérivées *positives* aura des branches qui se terminent à l'origine, par suite entre les arcs complets $S_n$ de ces dérivées positives l'équation (18) nous donne la relation

$$S_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}} S_{n+2}; \qquad (19)$$

car à l'origine $t_n = 0$.

De cette formule on voit, que les arcs complets S, $S_1$ étant connus, ceux de toutes les autres dérivées positives le seront. On en deduit aussi sans peine :

$$\frac{S_n S_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{S_{n-1} S_n}{\varepsilon_n} \cdots\cdots = \frac{S S_1}{\varepsilon_1},$$

en sorte que l'expression $\frac{S_n S_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}$ est indépendante de $n$. Elle ne dépend pas non plus de $\varepsilon$ parceque on peut prendre une courbe quelconque de la série pour courbe primive, par conséquent, la valeur de cette expression est constante, non seulement pour les lignes de la même suite de dérivées, mais pour toute ligne de la classe dont l'équation a la forme (E), et pour laquelle $\varepsilon$ est positive. On trouve la valeur de cette constante en considérant les dérivées positive d'un point, qui répondent à la valeur $\varepsilon_n = n$. La première dérivée étant une circonférence de diamètre $a$ nous donne $S_1 = \pi a$; la deuxième qui est une cardioïde sur la même ligne $a$ a pour périmètre $S_2 = 4a$, en

sorte que

$$\frac{S_n S_{n+1}}{s_{n+1}} = 2\pi a^2 . \qquad (20)$$

En résumé voici des propriétés de la classe de courbes dont l'équation polaire est de la forme

$$r = a \cos^\varepsilon \frac{\theta}{\varepsilon} . \qquad (E)$$

1.° L'inverse, la réciproque polaire et la dérivée de rang $n$ de chaque courbe E appartiennent à la même classe; leurs équations s'obtiennent de celle de la courbe primitive en y mettant, respectivement, $-\varepsilon$, $-(1+\varepsilon)$, $n+\varepsilon$ au lieu de $\varepsilon$.

2.° Chaque courbe E jouit de la propriété que : pour un point quelconque le centre de courbure projeté orthogonalement sur le rayon vecteur le partage en deux segments dont le rapport est constant et égal a $\varepsilon$.

3.° Les angles que soutendent à l'origine deux arcs correspondants de E et d'une quelconque $E_n$ des ses dérivées sont proportionnels au rapports $\varepsilon$, $\varepsilon_n$ qui appartiennent à ces courbes.

4.° La différence des longueurs d'un arc de E et la tangente en son extrémité (comptés tous les deux à partir des pieds des normales abaissées de l'origine) est proportionelle à l'arc correspondant de la deuxième dérivée positive de E.

5.° Pourvu que $\varepsilon$ soit positive, le rapport entre les arcs complets de E et de sa deuxième dérivée positive $E_2$ est égal au rapport des rapports $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ qui appartiennent, respectivement, à la première, et à la deuxième dérivée.

6.° Sous la même condition de $\varepsilon$ positive, le produit des arcs complets d'une courbe E et de sa première dérivée positive $E_1$, divisée par le rapport $\varepsilon_1$ qui appartient à cette dérivée, est égal à $2\pi a^2$, et par conséquent le même quelque soit la valeur de $\varepsilon$ qui particularise la courbe E.

Toutes ces propriétés, à l'exception, peut-être, de la seconde, ont été trouvées à plusieurs reprises et par d'autres moyens par M. W. Roberts. Dans son premier mémoire [1] ce géomètre habile a reconnu ces propriétés comme appartenant seulement aux dérivées positives de l'hyperbole equilatère; il a établit la propriété 6.° en rectifiant la lemniscate et sa dérivée et en se servant d'une formule de Legendre relative aux fonctions elliptiques complétes de première et de seconde espèce aux modules complémentaires. Dans un autre mémoire [2] le même géometre fait observer que les propriétés 1° et 4° appartiennent à toute courbe de la classe (E); et enfin,

---

(1) *Journal de Mathématiques*, t. X, p. 187; 1845.
(2) *Ibid.* t. XII, p. 448; 1847.

dans un troisième note ([1]), il arrive à la propriété générale 6° en se servant d'un théorème bien connu relatif au produit de deux intégrales eulériennes.

21. Il y a un cas particulier qui mérite d'être considéré à part; c'est le cas où le constant rapport $\varepsilon$ devient infini, ce qui arrivera quand, pour chaque point de S

$$\frac{s}{\mu_1 \rho} = -1.$$

Cette condition exprime que la projection de chaque centre de courbure sur le rayon vecteur coïncide avec l'origine, propriété caractéristique et bien connue de la spirale logarithmique. Dans ce cas les formules (11), (12) donnent pour toute valeur de $n$

$$\frac{r_n}{\mu_1 \rho_n} = -1, \quad \varepsilon_n = \infty;$$

en sorte que les dérivées $S_n$ sont toutes des spirales logarithmiques de même pole, situé à l'origine, et de même obliquité. En même temps l'équation (13) donne $d\psi = 0$, ou $\psi =$ *constante* comme cela doit être.

Observons en passant que, même dans le cas général où $\varepsilon$, et par conséquent $\frac{r}{\mu_1 \rho}$, est variable avec le rayon vecteur, $-1$ est toujours la limite vers laquelle $\frac{r_n}{\mu_1 \rho_n}$ converge quand $n$ augmente, de sorte qu'on peut dire que : *la dernière dérivée d'une courbe quelconque jouit de la propriété caractéristique d'une spirale logarithmique*. Cependant il ne faut pas dire que cette dernière dérivée se réduit actuellement à une telle courbe; car il est évidemment contraire à la propriété fondamentale des courbes dérivées de supposer qu'une courbe primitive, pour laquelle l'angle $\psi$ varie avec le rayon vecteur, peut avoir pour dérivée une spirale logarithmique pour laquelle cet angle $\psi$ est constant. En effet il est facile à constater que tous les points $m_n$ qui, sur la dernière dérivée, correspondent à des points $m$ de la courbe primitive où l'angle $\psi$ n'est pas nul, coïncident ou avec l'origine ou avec des points à l'infini, selon que $n$ est positive ou négative. C'est seulement pour des points $m$ infiniments voisins du pied d'une des normales communes abaissées de l'origine, que $n\psi = \theta - \theta_n$ peut avoir une valeur finie, tandis que

$$\lim.(r_n) = r \lim.(\cos^n \psi) = r.$$

Dans ce cas les points correspondants $m_n$ seront sur une circonférence de rayon $r$. La dernière dérivée se reduit donc à un point, l'origine, et à des circonférences autour de l'origine passant par les pieds des normales communes. La dernière dérivée

---

(1) *Ibid.* t. XV, p. 214; 1850.

négative se réduit aux mêmes circonférences avec une ligne à l'infini. Du reste ce point, ces circonférences et cette ligne peuvent être regardées comme des spirales logarithmiques particulières.

22. Avant de passer aux dérivées des surfaces reprenons, pour un moment, une courbe primitive S quelconque. Quelque soit, en un de ses points $m$, la valeur de $\frac{r}{\mu_1 \rho}$ ou de $\dot{\varepsilon}$ on peut, en général, trouver une courbe

$$r = a \cos^{\varepsilon} \frac{\theta}{\varepsilon}, \qquad \text{(E)}$$

osculatrice à S en ce point $m$. Pour cela on déterminera l'axe de E au moyen de l'équation (17), c'est-à-dire en prenant l'angle $\theta$ entre cet axe et le rayon vecteur $om$ tel que $-\frac{\theta}{\varepsilon}$ soit égale à la valeur de $\psi$ au point $m$ qu'on considère; ensuite on prendra pour $a$ une ligne telle que $a \cos^{\varepsilon} \frac{\theta}{\varepsilon}$ soit égale au rayon vecteur qui aboutit au même point $m$. Ces déterminations faites la courbe

$$r_n = a \cos^{\varepsilon_n} \frac{\theta}{\varepsilon_n} = a \cos^{n+\varepsilon} \frac{\theta}{n+\varepsilon} \qquad (\text{E}_n)$$

sera osculatrice au point correspondant $m_n$ de la dérivée $S_n$.

Comme cas particulier si $m$ est un point de rebroussement de S, les dérivées seront osculées aux points correspondants par les dérivées d'un point; courbes déjà considérées au n.° 8 et dont la $n.^{me}$ a pour équation

$$r_n = a \cos^n \frac{\theta}{n}.$$

Ainsi la première dérivée negative $S_{-1}$ aura en $m_{-1}$ un point d'inflexion; le cercle osculateur en $m_1$ de la première dérivée positive $S_1$ passera par l'origine, et ainsi de suite. Enfin si pour le point $m$ de S le centre de courbure, projeté sur le rayon vecteur, coïncide avec l'origine, c'est-à-dire si S est osculée au point $m$ par une spirale logarithmique, la même spirale tournée convenablement autour de son pôle, l'origine, osculera au point correspondant chacune des dérivées $S_n$.

(*Continua*).



# MÉMOIRE

## SUR LA FIGURE DE LA TERRE CONSIDÉRÉE COMME PEU DIFFERENTE D'UNE SPHÈRE

**PAR M. OSSIAN BONNET**

répetiteur à l'Ecole Polytechnique de Paris.

(Continuazione. V. pag. 59.)



10. Ajoutons aux valeurs des angles $i$ et $i_1$ fournies par les égalités (15) et (17) le terme $\alpha \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi}$. Ces angles deviendront, d'après le resultat obtenu au n.° (7), les azimuths correspondants au méridien et au parallele, et l'on aura pour le premier de ces azimuths

$$(20)\qquad \zeta=\alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right)=\alpha\frac{d.\frac{du}{\sin\theta\, d\varphi}}{d\theta}=\frac{1}{2}\cos\omega\,,$$

et pour le second,

$$(21)\qquad \zeta_1=\frac{\pi}{2}-\alpha\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{d.\frac{du}{\sin\theta\, d\varphi}}{d\theta}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\omega.$$

Ajoutant ces deux valeurs, on trouve

$$\zeta+\zeta_1=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi quoique l'azimuth correspondant au méridien ne soit pas nul, et que l'azimuth correspondant au parallèle ne soit pas un droit, la somme de ces deux azimuths vaut neanmoins $\frac{\pi}{2}$, ce qui est assez remarquable.

11. Des valeurs de $i$ et de $i_1$ obtenues au n.° (9) on deduit aisément l'expression de la courbure géodésique des méridiens et des parallèles. On n'a qu'à appliquer la formule (11) de la page 43 de notre mémoire sur la théorie générale des surfaces, en remarquant qu'ici les lignes coordonnées sont les courbes $\varphi=$ const., $\theta=$ const., dont les courbures géodésiques ont été données au n.° (4). Un seul des deux resultats aux quels on est conduit est assez remarquable. Nous nous bornerons a l'énoncé de ces resultats. $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_m$ étant la courbure géodésique du méridien et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_\varphi$

celle du parallèle on trouve

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_m = \alpha\left(\frac{\frac{d^3u}{d\theta^2 d\varphi}}{\sin\theta} - 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\theta d\varphi} + \frac{\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\frac{du}{d\varphi}\right)$$

$$= \alpha\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\frac{d^2u}{d\theta d\varphi}}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right) = \alpha\frac{d^2.\frac{du}{\sin\theta\, d\varphi}}{d\theta^2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_p = \cot\theta\,(1 - \alpha u) + \alpha\left(\frac{du}{d\theta} - \frac{\frac{d^3u}{d\theta d\varphi^2}}{\sin^2\theta}\right).$$

La valeur de $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_m$ peut encore, d'après la formule (19), se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_m = -\frac{1}{2}\sin\omega\frac{d\omega}{d\theta};$$

et l'on voit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour que les méridiens soient des lignes géodésiques est que ces méridiens coupent chacun sous un angle constant les différents parallèles.

12. Cherchons la distance d'un méridien terrestre quelconque à la courbe qui représente l'intersection du méridien celeste correspondant avec la surface de la terre. C'est comme on le voit la distance des deux courbes

$$\varphi - \alpha\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin^2\theta} = l, \quad \varphi = l.$$

Or, $\alpha$ étant assez petit pour que son carré puisse être considéré comme nul, la distance cherchée est evidemment pour le point $(\theta, \varphi)$ du méridien terrestre

$$(\varphi - l)(1 + \alpha u)\sin\theta$$

ou bien, en négligeant le carré de $\alpha$,

$$\alpha\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}.$$

Si l'on se rappelle la formule (8) établie plus haut, n.° (4), on voit que cette distance n'est autre chose que la valeur absolue de la courbure géodésique de la courbe $\varphi =$ const. passant au point $(\theta, \varphi)$.

On peut enoncer le résultat précédent d'une autre manière. Comme l'expression

$\alpha\dfrac{\dfrac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}$, contient $\alpha$ en facteur, il est clair que l'on peut, lorsq'on néglige $\alpha^2$, supposer que dans $\dfrac{\dfrac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}$, les valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ au lieu de se rapporter à un point du méridien terrestre, se rapportent à un point distant du premier d'une quantité de l'ordre $\alpha$. Cela étant on peut dire que si l'on considére une courbe $\varphi =$ const. représentant l'intersection de la surface de la terre avec le plan d'un certain méridien celeste, pour le méridien terrestre lieu des points pour lesquels les verticales sont parallèles au plan de la première courbe, la distance de ces deux courbes sera égale pour chaque point à la courbure géodésique de la première courbe. Ce qui est assez remarquable.

Cherchons de même la distance d'un parallèle terrestre à la courbe que représente l'intersection de la terre avec le cône ayant pour sommet le centre de la terre, et pour base le parallèle celeste correspondant, c'est-à-dire la distance des deux courbes

$$\theta - \alpha\frac{du}{d\theta} = \frac{\pi}{2} - \lambda\,, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \lambda.$$

Or d'après l'hypothèse faite sur $\alpha$, cette distance est pour le point $\theta$, $\varphi$ du parallèle terrestre égale à

$$(1 + \alpha u)\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \lambda\right)$$

ou bien à

$$\alpha\frac{du}{d\theta}$$

en négligeant les termes en $\alpha^2$.

13. Nous allons maintenant nous occuper des lignes géodésiques. On sait que l'élément d'une surface en fonction de deux variables independantes $u$ et $v$, étant

$$ds = (E\,du^2 + G\,dv^2)^{\frac{1}{2}},$$

on a pour définir une ligne géodésique quelconque, les deux equations

$$di = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{dE}{dv}\,du - \frac{dG}{du}\,dv\right), \qquad \text{tang}\, i = \frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E}du}\,,$$

où $i$ représente l'angle variable que fait la ligne géodésique avec les courbes $v$=const.

Supposons que pour la terre les deux variables $u$ et $v$ soient $\theta$ et $\varphi$ en nous rappelant la formule (7)

$$ds^2 = (1 + 2\alpha\, du)\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

nous trouverons aisément, pour la première équation

$$di = \frac{1}{(1+2\alpha u)\sin\theta}\left(\alpha \frac{du}{d\varphi}\, d\theta - \alpha \sin^2\theta\, \frac{du}{d\theta}\, d\varphi - (1+2\alpha u)\sin\theta\cos\theta\, d\varphi\right)$$

ou, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2$,

$$(24) \qquad di = -\cos\theta\, d\varphi + \alpha\left(\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sin\theta}\, d\theta - \sin\theta\, \frac{du}{d\theta}\, d\varphi\right);$$

et pour la seconde équation

$$(25) \qquad \operatorname{tang} i = \frac{\sin\theta\, d\varphi}{d\theta}.$$

Posons

$$(26) \qquad d\theta = \cos i\, dt$$

$t$ étant une nouvelle variable dont on indiquera plus bas la signification, les équation (25) et (24) pourront être mises sous la forme

$$(27) \qquad d\varphi = \frac{\sin i}{\sin\theta}\, dt,$$

$$(28) \qquad di = -\cot\theta \sin i\, dt + \alpha\left(\frac{\cos i}{\sin\theta}\, \frac{du}{d\varphi} - \sin i\, \frac{du}{d\theta}\right) dt,$$

et la recherche d'une ligne géodésique quelconque de la terre sera ramenée à celle des valeurs de $\theta$, $\varphi$, $i$ fonctions de $t$ qui satisfont aux équations (26), (27), et (28) et qui pour $t = 0$ se reduisent à des nombres connus $\theta_0$, $\varphi_0$, $i_0$. Or on peut démontrer une propriété importante de ces fonctions $\theta$, $\varphi$, $i$ qui rend leur détermination très facile. Négligeons dans l'équation (28) le terme en $\alpha$ du second membre et considérons les trois nouvelles équations

$$(26 \text{ bis}) \qquad d\theta = \cos i\, dt,$$

$$(27 \text{ bis}) \qquad d\varphi = \frac{\sin i}{\sin\theta}\, dt,$$

$$(28 \text{ bis}) \qquad di = -\cot\theta \sin i\, dt.$$

Je dis que si l'on suppose $t$ assez petit pour que $\alpha t^2$ et $t^4$ soient négligeables, les valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ fonctions de $t$ que l'on déduit des équations (26), (27), (28) seront les mêmes que les valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ déduites des équations (26 bis), (27 bis), (28 bis) et que la valeur de $i$ déduite des premièrs équations sera égale à la valeur

de $i$ déduite des équations (26 bis), (27 bis), (28 bis) augmentée du produit de $t$ par la valeur de $\alpha\left(\frac{\cos i}{\sin\theta}\frac{du}{d\varphi} - \sin i\frac{du}{d\theta}\right)$ correspondante aux valeurs initiales de $\theta$, $\varphi$, $i$. Il est bien étendu que dans les deux systèmes de valeurs de $\theta$, $\varphi$, $i$ les valeurs initiales correspondantes à $t=0$ doivent être les mêmes. Cette propriété s'apercoit immédiatement, il suffit d'intégrer les deux systèmes d'équations par la méthode des séries en ne poussant les calculs que jusqu'aux termes en $t^3$ et en négligéant toujours les termes en $\alpha^2$ et en $\alpha t^2$. Cela posé, comme les équations (26 bis), (27 bis), (28 bis) se rapportent au cas où la terre serait sphèrique, on voit que la détermination des lignes géodésiques pour le cas général d'une surface peu différente d'une sphère ne dépend que de la résolution d'un triangle sphèrique et peut par conséquent être faite au moyen des formules connues de la trigonometrie. Voici l'enoncé du Théorème par lequel se fait cette reduction et que resulte de ce qui précéde: *Si sur la sphère de rayon* 1 *on considére un triangle sphèrique* ABC *dans le quel* AB $=\theta_0$, ABC $=\pi - i_0$, BC $=t$ *et que l'on détermine les autres éléments de ce triangle, on trouvera dans le cas où la quatrième puissance de t sera négligeable,* AC *égal à* $\theta$, CAB *égal à* $\varphi-\varphi_0$, *enfin* ACB *égal à i diminué du produit de t par la valeur* $\alpha\left[\frac{\cos i_0}{\sin\theta_0}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 - \sin i_0\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0\right]$ *que prend* $\alpha\left[\frac{\cos i}{\sin\theta}\frac{du}{d\varphi} - \sin i\frac{du}{d\theta}\right]$ *pour les valeurs* $\theta_0$, $\varphi_0$, $i_0$ *de* $\theta$, $\varphi$, $i$; $\theta$, $\varphi$ *et i étant les valeurs fonctions de t qui satisfont aux équations* (26), (27), (28) *et qui se réduisent respectivement à* $\theta_0$. $\varphi_0$, $i_0$ *pour* $t=0$, *c'est à dire les valeurs que conviennent à la ligne géodésique de la terre qui part du point* $(\theta_0, \varphi_0)$ *et qui coupe en ce point la ligne* $\varphi=$ const., *sous l'angle* $i_0$. On peut ajouter que *la longueur de la ligne géodésique depuis le point de départ* $(\theta_0, \varphi_0)$ *jusqu'au point* $(\theta, \varphi)$ *correspondant à une valeur quelconque de t, dont la quatrième puissance peut être négligée, est*

$$s = (1+\alpha u)t.$$

En effet les équations (26) et (27) montrent que

$$ds = (1+\alpha u)dt.$$

Or, en intégrant, il vient

$$s = t + \alpha\int_0^t u dt\ ,$$

ou développant l'intégrale du second membre suivant les puissances de $t$, d'après la série de Taylor et négligeant les termes en $dt^2$,

$$s = t(1+\alpha u).$$

Cette nouvelle relation de laquelle on tire encore

$$(29) \qquad t = s(1 - \alpha u)$$

en négligeant $\alpha^2$, pourra, lorsqu'on aura determiné $\theta$, $\varphi$, $i$ en fonction de $t$, servir à trouver ces mêmes quantités en fonction de $s$.

14. Appliquons les resultats qui précédent. Posons pour simplifier

$$\alpha\left[\frac{\cos i_0}{\sin\theta_0}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 - \sin i_0\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0\right] = \beta,$$

$\beta$ étant alors un nombre dont on peut négliger le carré. Le triangle sphérique ABC donne immédiatement

$$(30) \qquad \cos\theta = \cos\theta_0\cos t - \sin\theta_0\sin t\cos i_0,$$

$$(31) \qquad \sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\sin t\sin i_0}{\sin\theta},$$

$$(32) \qquad \sin(i - \beta) = \frac{\sin\theta_0\sin i_0}{\sin\theta}.$$

L'équation (30), quand on néglige $t^4$ revient à

$$(33) \qquad \cos\theta = \cos\theta_0 - \sin\theta_0\cos i_0\, t - \cos\theta_0\frac{t^2}{2} + \sin\theta_0\cos i_0\frac{t^3}{6}.$$

De là on peut deduire la valeur de $\theta$ ordonnée suivant les puissances de $t$. Posons, en effet,

$$\theta = \theta_0 + at + bt^2 + ct^3$$

nous aurons en négligeant toujours $t^4$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \sin\theta_0(at + bt^2 + ct^3) - \frac{\cos\theta_0}{2}(a^2t^2 + 2abt^3) + \frac{\sin\theta_0 a^3}{6}t^3$$

ou bien

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - a\sin\theta_0 t \left.\begin{matrix} - 2b\sin\theta_0 \\ - a^2\cos\theta_0 \\ \phantom{x}\end{matrix}\right|\frac{t^2}{2}\left.\begin{matrix} - 6c\sin\theta_0 \\ - 6ab\cos\theta_0 \\ + a^3\sin\theta_0\end{matrix}\right|\frac{t^3}{6}.$$

Comparant à la première valeur de $\cos\theta$, on trouve

$$a = \cos i_0, \quad b = \frac{1}{2}\cot\theta_0\sin^2 i_0, \qquad c = -\frac{1}{6}\sin^2 i_0\cos i_0(1 + 3\cot^2\theta_0),$$

donc

$$(34) \qquad \theta = \theta_0 + \cos i_0 t + \cot\theta_0\sin^2 i_0 \cdot \frac{t^2}{2} - \sin^2 i_0\cos i_0(1 + 3\cot^2\theta_0)\frac{t^3}{6}.$$

Ayant les valeurs de $\cos\theta$ et de $\theta$ suivant les puissance de $t$, il est aisé d'en dé-

duire sous la même forme la valeur de $\sin\theta$ dont nous aurons besoin pour la détermination de $\varphi$ et de $i$. Il suffit de remarquer qu'avec une approximation de l'ordre de $t^4$ on a

$$\cos(\theta-\theta_0)=1-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2}=1-\cos^2 i_0\,\frac{t^2}{2}-\cot\theta_0\sin^2 i_0\cos i_0\,\frac{t^3}{2}.$$

Or développant le premier membre et remplaçant dans le développement $\cos\theta$ par sa valeur déduite de l'équation (33) on n'a plus que $\sin\theta$ dont on peut tirer la valeur, ce qui donne

$$\sin\theta=\sin\theta_0+\cos\theta_0\cos i_0 t+\frac{\cos^2\theta_0-\cos^2 i_0}{\sin\theta_0}\,\frac{t^2}{2}$$
$$-\frac{\cos\theta_0\cos i_0}{\sin^2\theta_0}(\sin\theta_0+3\sin^2 i_0)\frac{t^3}{6}$$

de là on tire encore, en négligeant toujours $t^4$

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta_0}-\frac{\cos\theta_0\cos i_0}{\sin^2\theta_0}\,t+\frac{\cos^2 i_0(1+\cos^2\theta_0)-\sin^2 i_0\cos^2\theta_0}{\sin^3\theta_0}\,\frac{t^2}{2}$$
$$+\frac{\cos\theta_0\cos i_0}{\sin^4\theta_0}\Big[\sin^2 i_0(4+5\cos^2\theta_0)-\cos^2 i_0\,(5+\cos^2\theta_0)\Big]\frac{t^3}{6}.$$

Portant maintenant dans l'équation (31), après y avoir remplacé $\sin t$ par $t-\frac{t^3}{6}$ et négligeant les termes en $t^4$, on trouve

$$\sin(\varphi-\varphi_0)=\frac{\sin i_0}{\sin\theta_0}\,t-\frac{\cos\theta_0\sin i_0\cos i_0}{\sin^2\theta_0}\,t^2$$
$$+\frac{\sin i_0}{\sin^3\theta_0}\Big[2\cos^2 i_0(1+2\cos^2\theta_0)-\sin^2 i_0(1+2\cos^2\theta_0)\Big]\frac{t^3}{6}.$$

Cette égalité montre que $\sin(\varphi-\varphi_0)$ et $\varphi-\varphi_0$ sont de l'ordre de grandeur de $t$, on peut donc avec le degré d'approximation auquel nous nous soumettons faire

$$\varphi-\varphi_0=\sin(\varphi-\varphi_0)+\frac{\sin^3(\varphi-\varphi_0)}{6}.$$

On à ainsi

$$(35)\qquad \varphi-\varphi_0=\frac{\sin i_0}{\sin\theta_0}\,t-\frac{\cos\theta_0\sin i_0\cos i_0}{\sin^2\theta_0}\,t^2$$
$$+\frac{\sin i_0}{\sin^3\theta_0}\Big[\cos^2 i_0(1+2\cos^2\theta_0)-\sin^2 i_0\cos^2\theta_0\Big]\frac{t^3}{3}.$$

Substituant de même la valeur de $\frac{1}{\sin\theta}$ dans l'équation (32), on trouve

$$\sin(i-\beta)=\sin i_0-\frac{\cos\theta_0\sin i_0\cos i_0}{\sin\theta_0}t+\frac{\sin i_0[\cos^2 i_0(1+\cos^2\theta_0)-\sin^2 i_0\cos^2\theta_0]}{\sin^2\theta_0}\frac{t^2}{2}$$

$$+\frac{\cos\theta_0\sin i_0\cos i_0}{\sin^3\theta_0}\left[\sin^2 i_0(4+5\cos^2\theta_0)-\cos^2 i_0(5+\cos^2\theta_0)\right]\frac{t^3}{6}.$$

Pour déduire de là, la valeur de $i-\beta$ ordonnée suivant les puissances de $t$ posons

$$i-\beta=i_0+mt+nt^2+pt^3.$$

Nous aurons, en négligeant $t^4$

$$\sin(i-\beta)=\sin i_0+\cos i_0(mt+nt^2+pt^3)-\frac{\sin i_0}{2}(m^2t^2+2mnt^3)-\frac{\cos i_0}{6}m^3t^3$$

ou bien

$$\sin(i-\beta)=\sin i_0+m\cos i_0 t+\left.\begin{array}{l}2n\cos i_0\\ -m^2\sin i_0\end{array}\right|\frac{t^2}{2}+\left.\begin{array}{l}6p\cos i_0\\ -6mn\sin i_0\\ -m^3\cos i_0\end{array}\right|\frac{t^3}{6}.$$

Comparant à la première valeur de $\sin(i-\beta)$, il vient

$$m=-\cot\theta_0\sin i_0,\qquad n=\frac{\sin i_0\cos i_0(1+\cos^2\theta_0)}{2\sin^2\theta_0},$$

$$p=\frac{\cos\theta_0\sin i_0}{6\sin^3\theta_0}\left[\sin^2 i_0(1+\cos^2\theta_0)-\cos^2 i_0(5+\cos^2\theta_0)\right]$$

d'où

$$(36)\qquad i-i_0=\beta-\cot\theta_0\sin i_0 t+\frac{\sin i_0\cos i_0(1+\cos^2\theta_0)}{\sin^2\theta_0}\frac{t^2}{2}$$

$$+\frac{\cos\theta_0\sin i_0}{\sin^3\theta_0}\left[\sin^2 i_0(1+\cos^2\theta_0)-\cos^2 i_0(5+\cos^2\theta_0)\right]\frac{t^3}{6}.$$

15. La marche que nous venons de suivre pour déterminer les valeurs de $\theta$, $\varphi$, $i$ ordonnées suivant les puissances de $t$, n'est pas la plus simple. Notre but en l'employant a été de montrer comment le théorème enoncé au n.º (13), dispenserait de toute intégration et ferait dépendre de formules connues la détermination des éléments d'une ligne géodésique quelconque tracée sur la terre, mais on serait arrivé plus rapidement au resultat en intégrant directement les équations (26), (27), (28) par la méthode des séries. Cela tient à ce que les formules de la trigonometrie que l'on est conduit à employer dans l'application du théorème du n.º (13) donnent seulement les lignes trigonometriques des angles inconnus $\theta$, $\varphi$, $i$ et qu'il faut ensuite revenir de ces lignes trigonometriques aux angles euxmêmes. Cette remarque n'ote rien du reste

à l'importance du théorème du n.° (13) qui fournira toujours une solution des différents questions de la géodésie, et même dans beaucoup de cas la solution la plus simple.

Pour intégrer les équations (26), (27), (28) on leur substituira d'abord les équations (26 bis), (27 bis), (28 bis), d'après la remarque faite au n.° (13); puis prenant les dérivées premières et secondes de ces équations on trouvera

$$(37)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} = \cos i\,, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \cot\theta \sin^2 i\,, \quad \frac{d^3\theta}{dt^3} = -\frac{\sin^2 i \cos i(1+2\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}\\
&\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin i}{\sin\theta}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2\cos\theta \sin i \cos i}{\sin^2\theta},\\
&\qquad \frac{d^3\varphi}{dt^3} = \frac{2\sin i}{\sin^3\theta}\left[\cos^2 i(1+2\cos^2\theta) - \cos^2\theta \sin^2 i\right]\\
&\frac{di}{dt} = -\cot\theta \sin i\,, \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = \sin i \cos i \,\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta},\\
&\qquad \frac{d^3 i}{dt^3} = \frac{\sin i \cos\theta}{\sin^3\theta}\left[\sin^2 i(1+\cos^2\theta) - \cos^2 i(5+\cos^2\theta)\right].
\end{aligned}\right.$$

Or pour la série de Taylor, on a, en négligeant les puissances de $t$ supérieures à la troisième

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{2} + \left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)_0 \frac{t^3}{6},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{2} + \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_0 \frac{t^3}{6},$$

$$i = i_0 + \left(\frac{di}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2 i}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{2} + \left(\frac{d^3 i}{dt^3}\right)_0 \frac{t^3}{6};$$

en appelant

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_0, \left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)_0, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0, \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_0, \left(\frac{di}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2 i}{dt^2}\right)_0, \left(\frac{d^3 i}{dt^3}\right)_0$$

les valeurs respectives de

$$\frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}, \frac{d^3\theta}{dt^3}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \frac{d^3\varphi}{dt^3}, \frac{di}{dt}, \frac{d^2 i}{dt^2}, \frac{d^3 i}{dt^3}$$

pour $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, $i = i_0$; donc substituant aux dérivées les valeurs déduites des équations (37), et ajoutant $\beta$ à la valeur de $i$, on aura

$$(34)\qquad \theta = \theta_0 + \cos i_0 t + \cot\theta_0 \sin^2 i_0 \frac{t^2}{2} - \frac{\sin^2 i_0 \cos i_0 (1 + 2\cos^2\theta_0)}{\sin^2\theta_0}\frac{t^3}{6},$$

$$(35)\qquad \varphi = \varphi_0 + \frac{\sin i_0}{\sin\theta_0} t - \frac{\cos\theta_0 \sin i_0 \cos i_0}{\sin^2\theta_0} t^2$$

$$+ \frac{\sin i_0}{\sin^3\theta_0}\left[\cos^2 i_0 (1 + 2\cos^2\theta_0) - \sin^2 i_0 \cos^2\theta_0\right]\frac{t^3}{3},$$

$$(36)\qquad i = \beta + i_0 - \cot\theta_0 \sin i_0 t + \frac{\sin i_0 \cos i_0 (1 + \cos^2\theta_0)}{\sin^2\theta_0}\frac{t^2}{2}$$

$$+ \frac{\cos\theta_0 \sin i_0}{\sin^3\theta_0}\left[\sin^2 i_0 (1 + \cos^2\theta_0) - \cos^2 i_0 (5 + \cos^2\theta_0)\right]\frac{t^3}{6}$$

comme on l'a déjà obtenu précédemment.

16. Pour que les formules (34), (35), (36) puissent être commodement employées dans la théorie de la figure de la terre, il convient d'y introduire, comme fait Laplace, à la place de $t$ l'arc $s$ de la ligne géodésique, à la place de $\theta_0$ et $\theta$ les deux latitudes $\lambda_0$ et $\lambda$, à la place de $\varphi_0$ et $\varphi$ les deux longitudes $l_0$ et $l$, enfin à la place de $i_0$ et $i$ les deux azimuths $\zeta_0$ et $\zeta$. Or les formules (29), (12), (11) et (13), permettent de faire très simplement cette substitution. On remarque d'abord que dans les termes qui contiennent $t^2$ on $t^3$ en facteur, on peut immédiatement remplacer $t$ par $s$, $\theta_0$ par $\frac{\pi}{2} - \lambda_0$, $\varphi_0$ par $l_0$, enfin $i_0$ par $\zeta_0$. En effet les erreurs commises sont au moins de l'ordre de $\alpha t^2$ et par conséquent négligeables, nous obtenons ainsi

$$(37)\qquad \theta - \theta_0 = \cos i_0 t + \tang\lambda_0 \sin^2\zeta_0 \frac{s^2}{2} - \sin^2\zeta_0 \cos\zeta_0 (1 + 3\tang^2\lambda_0)\frac{s^3}{6},$$

$$(38)\qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{\sin t_0}{\sin\theta_0} t - \frac{\sin\lambda_0 \sin\zeta_0 \cos\zeta_0}{\cos^2\lambda_0} s^2$$

$$+ \frac{\sin\lambda_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\cos^2\zeta_0 (1 + 2\sin^2\lambda_0) - \sin^2\zeta_0 \sin^2\lambda_0\right]\frac{s^3}{3},$$

$$(39)\qquad i - i_0 = \beta - \cot\theta_0 \sin i_0 t + \frac{\sin\zeta_0 \cos\zeta_0 (1 + \sin^2\lambda_0)}{\cos^2\lambda_0}\frac{s^2}{2}$$

$$+ \frac{\sin\lambda_0 \sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\sin^2\zeta_0 (1 + \sin^2\lambda_0) - \cos^2\zeta_0 (5 + \sin^2\lambda_0)\right]\frac{s^3}{6}.$$

En second lieu, puisque, d'après la formule (12), on a

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda + \alpha\frac{du}{d\theta}, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 + \alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0$$

$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0$ étant la valeur de $\frac{du}{d\theta}$ pour les valeurs $\theta_0$ et $\varphi_0$ de $\theta$ et $\varphi$, on a aussi en retranchant,

$$\theta - \theta_0 = \lambda_0 - \lambda + \alpha\left[\frac{du}{d\theta} - \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0\right],$$

mais en négligeant les termes de l'ordre de $t^2$ ou de $\alpha$,

$$\frac{du}{d\theta} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0(\theta - \theta_0) + \left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0(\varphi - \varphi_0),$$

en appelant $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0$ les valeurs respectives de $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, $\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}$ pour $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$; d'ailleurs avec le même degré d'approximation

$$\theta - \theta_0 = \cos\zeta_0\, s, \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\, s$$

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = \frac{du^2}{d\lambda^2}, \qquad \frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} = -\frac{d^2u}{d\lambda\, dl},$$

donc on a

$$\theta - \theta_0 = \lambda_0 - \lambda + \alpha s\left[\cos\zeta_0\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0 - \frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0\right]$$

aux quantités près de l'ordre de $\alpha^2$.

On verrait de même qu'avec cette approximation

$$\varphi - \varphi_0 = l - l_0 + \alpha s\left[\frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0 - \cos\zeta_0\left\{\frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos^2\lambda_0} + \frac{2\sin\lambda_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right\}\right],$$

$$i - i_0 = \zeta - \zeta_0 + \alpha s\left[\left\{\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{1+\sin^2\lambda_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right\} - \frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0\right],$$

$$\beta = \alpha s\left[\frac{\cos\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \sin\zeta_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0\right].$$

Enfin en ne négligeant toujours que des termes en $\alpha^2$,

*

$$\cos i_0 t = \cos\zeta_0 s + \alpha s\left[\frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 - \cos\zeta_0\, u_0\right],$$

$$\frac{\sin i_0}{\sin\theta_0}\,t = \frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\,s + \alpha s\left[\frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\sin\lambda_0\cos\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 - \frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}u_0\right],$$

$$\cot\theta_0\sin i_0 t = \operatorname{tang}\lambda_0\sin\zeta_0 s + \alpha s\left[\frac{\sin\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\sin^2\lambda_0\cos\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 - \operatorname{tang}\lambda_0\sin\zeta_0\, u_0\right];$$

donc, en substituant dans les équations (37), (38), (39), il vient

$$(40)\quad \lambda - \lambda_0 = -s\cos\zeta_0 + \alpha s\left\{\cos\zeta_0\, u_0 - \frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \cos\zeta_0\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0 - \frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0\right\} - \frac{s^2}{2}\operatorname{tang}\lambda_0\sin^2\zeta_0 + \frac{s^3}{6}\sin^2\zeta_0\cos\zeta_0(1+3\operatorname{tang}^2\lambda_0),$$

$$(41)\quad l - l_0 = s\frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0} - \alpha s\left\{\frac{\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}u_0 - \frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\sin\lambda_0\cos\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 - \frac{\cos\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0\right\} - \frac{s^2\sin\lambda_0\sin\zeta_0\cos\zeta_0}{\cos^2\lambda_0} + \frac{s^3}{3}\frac{\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\cos^2\zeta_0(1+2\sin^2\lambda_0) - \sin^2\lambda_0\sin^2\zeta_0\right],$$

$$(42)\quad \zeta - \zeta_0 = -s\operatorname{tang}\lambda_0\sin\zeta_0 + \alpha s\left\{\operatorname{tang}\lambda_0\sin\zeta_0 u_z - \frac{\sin^2\lambda_0\cos\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 - \operatorname{tang}^2\lambda_0\sin\zeta_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\sin\lambda_0\cos\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0\right\}$$
$$+\frac{s^2}{2}\frac{\sin\zeta_0\cos\zeta_0(1+\sin^2\lambda_0)}{\cos^2\lambda_0} + \frac{s^3}{6}\frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\sin^2\zeta_0(1+\sin^2\lambda_0) - \cos^2\zeta_0(5+\sin^2\lambda_0)\right],$$

ces formules peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$(43)\quad \lambda - \lambda_0 = -\alpha s\sin\zeta_0\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) - s\cos\zeta_0\left[1 - \alpha u_0 - \alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0\right] - \frac{s^2}{2}\operatorname{tang}\lambda_0\sin^2\zeta_0 + \frac{s^3}{6}\sin^2\zeta_0\cos\zeta_0(1+3\operatorname{tang}^2\lambda_0),$$

$$(44)\qquad l-l_0=\frac{s\sin\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(1-\alpha u_0+\alpha\,\text{tang}\,\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)$$

$$+\alpha s\frac{\cos\zeta_0}{\cos\lambda_0}\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right)-s^2\frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0\cos\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}$$

$$+\frac{s^3}{3}\frac{\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\cos^2\zeta_0(1+2\sin^2\lambda_0)-\sin^2\lambda_0\sin^2\zeta_0\right],$$

$$(45)\qquad \zeta-\zeta_0=-s\,\text{tang}\,\lambda_0\sin\zeta_0\left(1-\alpha u_0+\alpha\,\text{tang}\,\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)$$

$$-\alpha s\,\text{tang}\,\lambda_0\cos\zeta_0\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right)+\frac{s^2}{2}\frac{\sin\zeta_0\cos\zeta_0(1+\sin^2\lambda_0)}{\cos^2\lambda_0}$$

$$+\frac{s^3}{6}\frac{\sin\lambda_0\sin\zeta_0}{\cos^3\lambda_0}\left[\sin^2\zeta_0(1+\sin^2\lambda_0)-\cos^2\zeta_0(5+\sin^2\lambda_0)\right]$$

et l'on voit alors que les différences en latitude en longitude, et en azimuth aux deux extremités d'une ligne géodésique quelconque ne dépendent de la figure de la terre que par les trois fonctions

$$\alpha\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right),\quad 1-\alpha u_0-\alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0,$$

$$1-\alpha u_0+\alpha\,\text{tang}\,\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}.$$

De ces trois fonctions, la premiere est connue, nous avons reconnu au n.° (9) qu'elle représentait la moitié du cosinus de l'angle sous lequel se coupent le méridien et le parallèle au point $(\theta,\ \varphi)$. Quant aux deux autres nous leur trouverons plus bas une signification intéressante.

En rapprochant les égalités (44) et (45), il vient

$$(46)\qquad (l-l_0)\sin\lambda_0+\zeta-\zeta_0=\frac{s^2}{2}\sin\zeta_0\cos\zeta_0+\frac{s^3}{3}\,\text{tang}\,\lambda_0\sin\zeta_0(1-4\cos^2\zeta_0).$$

Ainsi il éxiste entre la différence en longitude, et la différence en azimuth une relation indépendante de la figure de la terre.

**17.** Faisons dans les relations (43), (44), (45), (46), $\zeta_0 = 0$, ce qui revient à supposer que le premier élément de la ligne géodésique soit parallèle au plan du méridien celeste corréspondant au point de départ $(\theta_0\ ,\ \varphi_0)$. Nous aurons

$$(47) \qquad \lambda - \lambda_0 = - s\left[1 - \alpha u_0 - \alpha\left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2}\right)_0\right]$$

$$(48) \qquad l - l_0 = \frac{\alpha s}{\cos\lambda_0}\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) = \frac{\alpha s\cos\omega_0}{2\cos\lambda_0}$$

$$(49) \qquad \zeta - \zeta_0 = - \alpha s \operatorname{tang}\lambda_0\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) = - \frac{\alpha s}{2}\operatorname{tang}\lambda_0\cos\omega_0$$

$$(50) \qquad (l - l_0)\sin\lambda_0 + \zeta - \zeta_0 = 0$$

$\omega_0$ etant l'angle formé par le méridien et par le parallèle au point $(\theta_0\ ,\ \varphi_0)$.

En introduisant dans la seconde et la troisième de ces dernières relations la différence en latitude $\lambda - \lambda_0$ à la place de $s$, comme fait Laplace, il vient encore

$$(51) \qquad l - l_0 = - \frac{\alpha(\lambda - \lambda_0)}{\cos\lambda_0}\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) = - \frac{\alpha(\lambda - \lambda_0)\cos\omega_0}{2\cos\lambda_0}$$

$$(52) \qquad \zeta - \zeta_0 = \alpha\operatorname{tang}\lambda_0(\lambda - \lambda_0)\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) = \frac{\alpha}{2}(\lambda - \lambda_0)\operatorname{tang}\lambda_0\cos\omega_0.$$

Faisons, en second lieu $\zeta_0 = \frac{\pi}{2}$ ce qui revient à supposer que le premier élément de la ligne géodésique, soit perpendiculaire au plan correspondant du méridien celeste, les relation (43), (44), (45), (46) deviendront

$$(53) \qquad \lambda - \lambda_0 = - \alpha s\left(\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0 + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0}\right) - \frac{s^2}{2}\operatorname{tang}\lambda_0$$

$$= - \frac{\alpha s\cos\omega_0 + s^2\operatorname{tang}\lambda_0}{2}$$

$$(54) \qquad l - l_0 = \frac{s}{\cos\lambda_0}\left(1 - \alpha u_0 + \alpha\operatorname{tang}\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \alpha\frac{\left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right) - \frac{s^3}{3}\,\frac{\operatorname{tang}^2\lambda_0}{\cos\lambda_0}$$

$$(55)\qquad \zeta - \zeta_0 = - s \operatorname{tang} \lambda_0 \left( 1 - \alpha u_0 + \alpha \operatorname{tang} \lambda_0 \left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \alpha \frac{\left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2 \lambda_0} \right)$$

$$+ \frac{s^3}{3} \operatorname{tang} \lambda_0 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 \lambda_0 \right)$$

$$(56)\qquad (l - l_0) \sin \lambda_0 + \lambda - \lambda_0 = \frac{s^3}{3} \operatorname{tang} \lambda_0 \,.$$

Ces dernières formules qui sont plus specialement utiles en géodésie sont celles qu'a donné Laplace dans le Tome II de la Mécanique céleste.

18. Cherchons la courbure d'une section normale quelconque faite dans la surface de la terre et correspondante au point $m$ ou $(\theta_0, \varphi_0)$. Je dis que dans le cas actuel où il s'agit d'une surface peu différente d'une sphère, cette courbure est égale à l'angle infiniment petit que forment les deux normales à la surface de la terre, menées aux deux points infiniment voisins $m$ et $m'$ de la section normale divisé par la distance de ces points. En effet, $x$ étant ce dernier angle, $\omega$ l'inclinaison de l'élément $mm'$ sur le plan de l'une des sections principales au point $m$, enfin R le rayon de courbure correspondant à cette section principale, et R' l'autre rayon de courbure principal, on a, d'après une formule de notre mémoire sur la théorie des surfaces

$$\left(\frac{x}{mm'}\right)^2 = \frac{\cos^2\omega}{R^2} + \frac{\sin^2\omega}{R'^2}\,.$$

Cette relation peut s'écrire ainsi

$$\left(\frac{x}{mm'}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'}\right)^2 + \sin^2\omega \cos^2\omega \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2.$$

mais la surface considérée étant peu différente d'un sphère de rayon 1, les deux courbures principales $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ différent de 1 et par conséquent entr'elles d'une quantité de l'ordre $\alpha$, donc le terme $\sin^2\alpha \cos^2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2$ est de l'ordre $\alpha^2$ et peut par conséquent être négligé, on a donc simplement

$$\frac{x}{mm'} = \frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'}$$

ce qui montre, d'après la formule d'Euler que le quotient de $x$ par $mm'$ est bien la courbure de la section normale faite suivant $mm'$. Cela étant, menons par un

point de l'espace des parallèles respectives aux normales de la terre, aux points $m$ et $m'$, et à l'axe des pôles nous formerons un trièdre, et si nous appelons $\lambda_0$ et $l_0$ la latitude et la longitude du point $m$, $\lambda_0 + d\lambda_0$, $l_0 + dl_0$ la latitude et la longitude du point $m'$, le trièdre nous donnera

$$\cos x = \sin\lambda_0 \sin(\lambda_0 + d\lambda_0) + \cos\lambda_0 \cos(\lambda_0 + d\lambda_0)\cos dl_0$$

d'où plus simplement

$$x^2 = d\lambda_0^2 + \cos^2\lambda_0\, dl_0^2 .$$

Mais par des formules trouvées plus haut

$$l_0 = \varphi_0 - \alpha\frac{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0}{\sin^2\theta_0}\ , \qquad \lambda_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 + \alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0$$

d'où

$$dl_0 = \left(1 - \alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)_0}{\sin^2\theta_0}\right)d\varphi_0 - \alpha\left(\frac{\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0}{\sin^2\theta_0} - 2\,\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0\right)d\theta_0$$

$$d\lambda_0 = -\left[1 - \alpha\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0\right]d\theta_0 + \alpha\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 d\varphi_0$$

donc, en négligeant $\alpha^2$, et remarquant que

$$\frac{\cos^2\lambda_0}{\sin^2\theta_0} = 1 + 2\alpha\,\mathrm{tang}\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0\ ,$$

il vient

$$x^2 = \left[1 - 2\alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0\right]d\theta_0^2 + \left(1 + 2\alpha\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 \mathrm{tang}\,\lambda_0 - 2\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)\sin^2\theta_0\, d\varphi_0^2$$
$$+ 4\alpha\left[\frac{1}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right]\sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0 .$$

Or, en appelant $i_0$ l'angle de l'élément $mm'$ avec la ligne $\varphi =$ const. qui passe par le point $m$, et $ds_0$ l'élément $mm'$, on a

$$\frac{d\theta_0}{ds_0} = (1 - \alpha u)\cos i_0\ , \qquad \frac{\sin\theta_0\, d\varphi_0}{ds_0} = (1 - \alpha u_0)\sin i_0$$

donc, en divisant par $ds_0^2$ la valeur de $x^2$ et substituant à $\frac{d\theta_0}{ds_0}$ et $\frac{\sin\theta_0\, d\varphi_0}{ds_0}$ les valeurs, on trouve pour le carré $\left(\frac{1}{\rho_{i_0}}\right)^2$ de la courbure de la section normale faite

suivant $mm'$

$$\frac{x^2}{ds^2}=\left(\frac{1}{\rho_{i_0}}\right)^2=\left[1-2\alpha u_0-2\alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0\right]\cos^2 i_0$$

$$+\left(1-2\alpha u_0+2\alpha\tang\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-2\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)\sin^2 i_0$$

$$+4\alpha\left[\frac{1}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0+\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right]\sin i_0\cos i_0$$

et en extrayant la racine carrée et négligeant $\alpha^2$

$$(57)\qquad \frac{1}{\rho_{i_0}}=\left[1-\alpha u_0-\alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0\right]\cos^2 i_0$$

$$+\left(1-\alpha u_0+\alpha\tang\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)\sin^2 i_0$$

$$+2\alpha\left[\frac{1}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0+\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right]\sin i_0\cos i_0 .$$

Telle est l'expression de la courbure d'une section normale correspondante à l'inclinaison $i_0$ sur la courbe $\varphi=$ const. Introduisons dans cette expression à la place de l'angle $i_0$ l'azimuth correspondant $\zeta_0$ et pour cela remarquons que

$$\cos^2 i_0=\cos^2\zeta_0+2\alpha\sin\zeta_0\cos\zeta_0\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0,$$

$$\sin^2 i_0=\sin^2\zeta_0-2\alpha\sin\zeta_0\cos\zeta_0\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0,$$

$$\sin i_0\cos i_0=\sin\zeta_0\cos\zeta_0-2\alpha(\sin^2\zeta_0-\cos^2\zeta_0)\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0$$

nous aurons, en négligeant toujours $\alpha^2$,

$$(58)\qquad \frac{1}{\rho'_{\zeta_0}}=\left[1-\alpha u_0-\alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0\right]\cos^2\zeta_0$$

$$+\left(1-\alpha u_0+\alpha\tang\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\alpha\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)\sin^2\zeta_0$$

$$+2\alpha\left[\frac{1}{\cos\lambda_0}\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0+\frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right]\sin\zeta_0\cos\zeta_0 .$$

$\frac{1}{\rho'_{\zeta_0}}$ représente la courbure de la section normale corréspondante à l'azimuth $\zeta_0$.

On voit que cette valeur est composée en $\zeta_0$ comme la valeur de $\frac{1}{\rho_{i_0}}$ est composée en $i_0$. Ainsi si $i_0 = \zeta_0$ on a

$$\frac{1}{\rho_{i_0}} = \frac{1}{\rho'_{\zeta_0}}.$$

Faisons successivement dans les égalités (57) et (58), $i_0 = 0$ et $\zeta_0 = 0$ nous aurons pour la courbure de la section normale dont le premier élément est tangent à la courbe $\varphi =$ const. et pour celle de la section dont le premier élément est parallèle au plan du méridien céleste

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho'_0} = 1 - \alpha u_0 - \alpha\left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2}\right)_0.$$

Faisons en second lieu $i_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\zeta_0 = \frac{\pi}{2}$ et nous trouverons pour la courbure de la section normale dont le premier élément est perpendiculaire à la courbe $\varphi =$const. et pour celle de la section dont le premier élément est perpendiculaire au plan du méridien céleste

$$\frac{1}{\rho_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\rho'_{\frac{\pi}{2}}} = 1 - \alpha u_0 + \alpha \operatorname{tang} \lambda_0 \left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \alpha \frac{\left(\frac{d^2 u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2 \lambda_0}.$$

On voit que les deux courbures $\frac{1}{\rho_0}$, $\frac{1}{\rho_{\frac{\pi}{2}}}$ ou $\frac{1}{\rho'_0}$, $\frac{1}{\rho'_{\frac{\pi}{2}}}$ ne sont autre chose que les deux fonctions, qui avec la fonction

$$\alpha\left[\frac{1}{\cos \lambda_0}\left(\frac{d^2 u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{\sin \lambda_0}{\cos^2 \lambda_0}\left(\frac{du}{dl}\right)_0\right]$$

entrent dans les expressions des différences en latitude, en longitude et en azimuth aux deux extrémités d'une ligne géodésique. Cela permet de mettre ces expressions, en se rappelant en outre l'égalité (18), sous la forme

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{1}{2}\alpha s \cos \omega \sin \zeta_0 - \frac{s}{\rho_0} \cos \zeta_0 - \frac{s^2}{2} \operatorname{tang} \lambda_0 \sin^2 \zeta_0 + \frac{s^3}{6} \sin^2 \zeta_0 \cos \zeta_0 (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \lambda_0)$$

$$l - l_0 = s \frac{\sin \zeta_0}{\cos \lambda_0} \frac{1}{\rho_{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\alpha s \frac{\cos \omega_0 \cos \zeta_0}{\cos \lambda_0} - \frac{s^2 \sin \zeta_0 \cos \zeta_0 \sin \lambda_0}{\cos^2 \lambda_0}$$
$$+ \frac{s^3}{3} \frac{\sin \zeta_0}{\cos^3 \lambda_0} \left[\cos^2 \zeta_0 (1 + 2 \sin^2 \lambda_0) - \sin^2 \zeta_0 \sin^2 \lambda_0\right]$$

$$\zeta - \zeta_0 = - s \operatorname{tang} \lambda_0 \sin \zeta_0 \frac{1}{\rho_{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{2}\alpha s \cos \omega_0 \operatorname{tang} \lambda_0 \cos \zeta_0 + \frac{s^2}{2} \frac{\sin \zeta_0 \cos \zeta_0}{\cos^2 \lambda_0}(1 + \sin^2 \lambda_0)$$
$$+ \frac{s^3}{6} \frac{\sin \lambda_0 \sin \zeta_0}{\cos^3 \lambda_0} \left[\sin^2 \zeta_0 (1 + \sin^2 \lambda_0) - \cos^2 \zeta_0 (\zeta + \sin^2 \lambda_0)\right].$$

La combinaison des égalités (43), (44), (58), donne encore la relation

$$\frac{1}{\rho'_{\zeta_0}} = \frac{(l-l_0)\cos\lambda_0\sin\zeta_0-(\lambda-\lambda_0)\cos\zeta_0}{s}$$

$$+\frac{s}{2}\operatorname{tang}\lambda_0\sin^2\zeta_0\cos\zeta_0-\frac{s^2}{6}\sin^2\zeta_0\left(\frac{\cos^2\zeta_0}{\cos^2\lambda_0}-2\sin^2\zeta_0\right).$$

(*Continua*).

---

## EXTRAIT D'UNE LETTRE

### DE M. KRONECKER A M. BRIOSCHI.

. . . . . Sans doute l'un et l'autre des systèmes de substitutions (A, A') dont Mr. Hermite fait mention *) est propre à définir le type d'une fonction de sept lettres possédant trente valeurs distinctes. Mais c'est *un seul* type auquel les deux systèmes conviennent, savoir celui que j'ai publié dans mon mémoire du 22. Avril 1858 **). En effet, la fonction de $a, b, c, d, e, f, g$ que j'y ai donnée reste invariable par les substitutions du système A ou par celles du système A', suivant que les lettres $a, b, c, d, e, f, g$ sont remplacées respectivement par : $x_0$, $x_6$, $x_5$, $x_4$, $x_3$, $x_2$, $x_1$ ou par : $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$. Donc les deux systèmes A et A' ne sont pas essentiellement distincts, bien qu'ils se présentent sous des formes différentes.

Pour donner quelques éclaircissements sur ce point; considérons une substitution quelconque de $n$ lettres : $a, b, c, \ldots. k$. En faisant :

$$a=x_1\,,\quad b=x_2\,,\quad c=x_3\,,\quad \ldots\ldots k=x_n$$

la substitution dont il s'agit pourra s'exprimer par un changement : $\begin{pmatrix} i \\ \theta(i) \end{pmatrix}$ opéré sur les indices. Or la même substitution sera représentée par: $\begin{pmatrix} \varphi(i) \\ \varphi\theta(i) \end{pmatrix}$, si l'on pose :

$$a=x_{\varphi(1)}\,,\quad b=x_{\varphi(2)}\,,\quad c=x_{\varphi(3)}\,,\quad \ldots\ldots k=x_{\varphi(n)}$$

$x_{\varphi(1)}$, $x_{\varphi(2)}$, .... $x_{\varphi(n)}$ étant une quelconque des $1.2.3\ldots n$ permutations, dont les quantités: $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ sont susceptibles. Enfin il est clair que, $\psi(i)$ désignant la fonction inverse de $\varphi(i)$, le changement $\begin{pmatrix} \varphi(i) \\ \varphi\theta(i) \end{pmatrix}$ est identique avec celui-ci : $\begin{pmatrix} i \\ \varphi\theta\psi(i) \end{pmatrix}$.

La même substitution des $n$ lettres : $a, b, c, \ldots\, k$ peut donc être représentée sous $1.\,2.\,3\ldots. n$ formes différentes :

$$\begin{pmatrix} i \\ \theta(i) \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i \\ \varphi\theta\psi(i) \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i \\ \varphi_1\theta\psi_1(i) \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i \\ \psi_2\theta\psi_2(i) \end{pmatrix},\ \ldots.$$

C'est par ce rapprochement qu'on parvient à réunir les deux systèmes de substitutions (A; A') de Mr. Hermite. En effet, si l'on désigne une substitution quelconque du système A par : $\begin{pmatrix} i \\ \theta(i) \end{pmatrix}$, celles du système A' sont exprimées par : $\begin{pmatrix} i \\ -\theta(-i) \end{pmatrix}$, ce qui est le cas particulier de : $\begin{pmatrix} i \\ \varphi\theta\psi(i) \end{pmatrix}$, où l'on a fait : $\varphi(i)=-i$.

---

*) Vedi pag. 60. **) Monatsberichte der Berliner Akademie. Aprile 1858.

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

## INTORNO AD UNA FORMOLA DI INTERPOLAZIONE.

**TCHEBICHEF** - SUR LES FRACTIONS CONTINUES - Giornale di Liouville - Agosto - Settembre 1858. (*)

**HERMITE** - SUR L'INTERPOLATION - Comptes Rendus 10 Gennajo 1859.

Nel 3° fascicolo di questi *Annali* (pag. 182) mediante alcune note proprietà dei quozienti e dei denominatori delle ridotte di una frazione continua, ho dedotto dalla formola di interpolazione di Lagrange una formola di interpolazione enunciata dal Sig. Tchebichef nel T° 53 del giornale di Crelle. In quell'articolo ho considerato la frazione continua che ottiensi sviluppando la frazione $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, essendo $\varphi(x)$, $f(x)$ due polinomj dei gradi $n-1$, $n$. Ma se indichiamo con $\mu(x)$ un polinomio di grado qualunque il quale non venga annullato da alcuna delle radici $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ della equazione $f(x)=0$, e poniamo:

$$\frac{\mu(x)}{f(x)} = q_0 + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

si avrà $\varphi(x_s)=\mu(x_s)$, e la formola di interpolazione ottenuta nel detto articolo diverrà la più generale:

$$\psi(x) = \alpha_1 \sum_s \psi(x_s)\frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} - \alpha_2 D_1(x) \sum_s \psi(x_s) D_1(x_s)\frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\alpha_n D_{n-1}(x) \sum_s \psi(x_s) D_{n-1}(x_s)\frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)}$$

nella quale le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots ;$ $D_1, D_2 \ldots\ldots$ sono i coefficienti della $x$ nei quozienti $q_1, q_2 \ldots$ ed i determinanti delle ridotte della frazione continua:

$$\frac{\mu(x)}{f(x)} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

quali non differiscono da quelli delle ridotte della:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

(*) Tradotta dal russo dal sig. Bienaymè.

Notiamo che in questa formola si è supposto in generale il grado della funzione $\psi(x)$ essere $< n$; che se indichiamo con $m < n$ il grado della medesima, essendo in questo caso:

$$\sum_s \psi(x_s) D_{n-1}(x_s) \frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} = 0 \qquad \sum_s \psi(x_s) D_{m+1}(x_s) \frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} = 0$$

si avrà:

$$(1) \qquad \psi(x) = \alpha_1 \sum_s \psi(x_s) \frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} - \alpha_2 D_1(x) \sum_s D_1(x_s) \psi(x_s) \frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} + \ldots$$

$$+ (-1)^m \alpha_{m+1} D_m(x) \sum_s D_m(x_s) \psi(x_s) \frac{\mu(x_s)}{f'(x_s)} .$$

Il problema propostosi dal Sig. Tchebichef nella memoria citata: è il seguente « Supponendo conosciuti i valori di una funzione $\psi(x)$ per $x = x_1$, $x_2 \ldots x_n$ rappresentare approssimativamente quella funzione per un polinomio del grado $m$ non $> n$, in modo che la somma dei quadrati delle differenze tra questo polinomio e $\psi(x)$, moltiplicate ciascuna per numeri dati sia un minimo. » Se questi numeri si suppongono essere i valori di una funzione intiera $\theta(x)$ corrispondenti ad $x = x_1$, $x_2 \ldots x_n$; il secondo membro dell'equazione (1) nella quale pongasi: $\mu(x) = \theta^2(x) f'(x)$ è il polinomio richiesto.

Ma senza ricorrere alle proprietà delle frazioni continue si può risolvere il problema superiore direttamente nel modo seguente. Sieno $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_m(x)$ $m+1$ polinomj di gradi non $>$ di $m$, e suppongasi:

$$(2) \qquad \psi(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \ldots + A_m \varphi_m(x).$$

I coefficienti $A_0$, $A_1 \ldots$ pel dato del problema dovranno essere tali che risulti un minimo la espressione:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \psi(x_i) - A_0 \varphi_0(x_i) - A_1 \varphi_1(x_i) - \ldots - A_m \varphi_m(x_i) \right\}^2 \theta^2(x_i) ;$$

per cui se supponiamo che le funzioni $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ .. soddisfino alle equazioni:

$$(3) \qquad \sum_i \varphi_r(x_i) \varphi_s(x_i) \theta^2(x_i) = 0 \qquad \sum_i \varphi_r^2(x_i) \theta^2(x_i) = 1$$

si avranno le:

$$A_0 = \sum_i \psi(x_i) \varphi_0(x_i) \theta^2(x_i) , \qquad A_1 = \sum_i \psi(x_i) \varphi_1(x_i) \theta^2(x_i) \ldots$$

È ora facile il vedere che le equazioni (3) determinano completamente le funzioni $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x) \ldots$ allorquando suppongansi essere i gradi delle medesime $0, 1, 2 \ldots m$. Infatti supponiamo:

$$\varphi_r(x) = p_{0,r} x^r + p_{1,r} x^{r-1} + \ldots + p_{r,r} .$$

Se nella prima delle (3) poniamo $r = 0$ si ha:

$$(4)\qquad \sum_i \varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0\,,$$

così ponendo $s = 1$ ottiensi:

$$p_{0,1}\sum_i x_i\,\varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) + p_{1,1}\sum_i \varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0$$

e per la (4)

$$\sum_i x_i\,\varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0$$

per cui continuando si avranno le:

$$\sum_i \varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0\,,\quad \sum_r x_i\,\varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0\,,\quad \ldots\ldots \sum_r x_i^{r-1}\varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0$$

e:

$$\sum_i x_i^r\,\varphi_r(x_i)\,\theta^2(x_i) = \frac{1}{p_{0,r}}\,.$$

Ora ponendo:

$$s_m = \sum_i x_i^m\,\theta^2(x_i)$$

queste equazioni equivalgono alle:

$$\begin{array}{l} p_{r,r}\,s_0 + p_{r-1,r}\,s_1 + \ldots\ldots + p_{0,r}\,s_r = 0 \\ p_{r,r}\,s_1 + p_{r-1,r}\,s_2 + \ldots\ldots + p_{0,r}\,s_{r+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{r,r}\,s_r + p_{r-1,r}\,s_{r+1} + \ldots\ldots + p_{0,r}\,s_{2r} = \dfrac{1}{p_{0,r}}\,; \end{array}$$

quindi indicando con $\delta_r$, $\Delta_r(x)$ i determinanti:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_r \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_r & s_{r+1} & \ldots & s_{2r} \end{vmatrix}\,,\qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_r \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-1} & s_0 & \ldots & s_{2r-1} \\ 1 & x & \ldots & x^r \end{vmatrix}$$

si avranno le:

$$\delta_r\,p_{0,r} = \frac{1}{p_{0,r}}\,\delta_{r-1}\,,\qquad \delta_r\,\varphi_r(x) = \frac{1}{p_{0,r}}\,\Delta_r(x)$$

dalle quali:

$$\varphi_r(x) = \frac{\Delta_r(x)}{\sqrt{\delta_r\,\delta_{r-1}}}\,.$$

Sostituendo nella (2) per $A_0$, $A_1$ .... i valori trovati e per $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ .... i valori dati da quest'ultima equazione si ha la formola cercata, la quale non differisce dalla (1) come si può dimostrare mediante alcune note relazioni (Vedi la mia memoria - *Intorno ad alcune quistioni d'Algebra Superiore - Annali di Tortolini - Anno* 1854).

Pavia. Gennajo 1859. PROF. F. BRIOSCHI.

## SULLE LINEE DI CURVATURA DELLA SUPERFICIE DELLE ONDE.

ZECH —. DIE KRUMMUNGSLINIE DER WELLENFLACHE ZWEIAXIGER KRYSTALLE — Giornale di Crelle. T.° 54.
CAYLEY —. ON THE WAVE SURFACE. — The Quarterly Journal of Mathematics. N.° 9.
BERTRAND — NOTE SUR LA SURFACE DES ONDES. — Comptes Rendus. Nov. 1858.

Sieno $l$, $m$, $n$, $\varphi$, funzioni di due parametri indipendenti $u$, $v$. Considerando la superficie inviluppo del piano:

$$(1) \qquad lx+my+nz=\varphi$$

trovasi facilmente che per quella superficie le due famiglie di linee $u$=cost., $v$=cost. sono a tangenti conjugate se:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} l & m & n & \varphi \\ \frac{dl}{du} & \frac{dm}{du} & \frac{dn}{du} & \frac{d\varphi}{du} \\ \frac{dl}{dv} & \frac{dm}{dv} & \frac{dn}{dv} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d^2l}{du\,dv} & \frac{d^2m}{du\,dv} & \frac{d^2u}{du\,dv} & \frac{d^2\varphi}{du\,dv} \end{vmatrix} = 0$$

e che le linee di una famiglia sono ortogonali a quelle dell'altra se:

$$(3) \qquad (l^2+m^2+n^2)\left(\frac{dl}{du}\frac{dl}{dv}+\frac{dm}{du}\frac{dm}{dv}+\frac{dn}{dv}\frac{dn}{dv}\right)$$
$$=\left(l\frac{dl}{du}+m\frac{dm}{du}+n\frac{dn}{du}\right)\left(l\frac{dl}{dv}+m\frac{dm}{dv}+n\frac{dn}{dv}\right).$$

Quindi le linee $u$ = cost., $v$ = cost. sono linee di curvatura della superficie inviluppo del piano (1) allorquando le $l$, $m$, $n$, $\varphi$ soddisfino le equazioni (2), (3).

Supponiamo:

$$(4) \qquad f^2+m^2+n^2=1\,, \qquad \varphi=u$$

si avranno le:

$$l\frac{dl}{du}+m\frac{dm}{du}+n\frac{dn}{du}=0\,, \qquad l\frac{dl}{dv}+m\frac{dm}{dv}+n\frac{dn}{dv}=0\,, \qquad \frac{d\varphi}{dv}=0$$

e la equazioni (2) (3) diventano:

$$\begin{vmatrix} \frac{dm}{dv} & \frac{dn}{dv} \\ \frac{d^2m}{du\,dv} & \frac{d^2n}{du\,dv} \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{dl}{du}\frac{dl}{dv}+\frac{dm}{du}\frac{dm}{dv}+\frac{dn}{du}\frac{dn}{dv}=0$$

cioè se $l$, $m$, $n$, $\varphi$ soddisfano le equazioni (4), le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee $u =$ cost., $v =$ cost., sieno linee di curvatura sono le:

$$(5) \qquad \frac{1}{\frac{dl}{dv}} \frac{d^2 l}{du\, dv} = \frac{1}{\frac{dm}{dv}} \frac{d^2 m}{du\, dv} = \frac{1}{\frac{dn}{dv}} \frac{d^2 u}{du\, dv}.$$

Ora è noto (*Lamé – Leçons sur la Théorie mathématique etc.* pag. 243) che supponendo:

$$(6) \quad l^2 = \frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad m^2 = \frac{(b^2-u^2)(b^2-v^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \quad n^2 = \frac{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \quad \varphi = u$$

la superficie inviluppo è la superficie delle onde; ma questi valori evidentemente non soddisfano alle equazioni (5), quindi le linee $u =$ cost., $v =$ cost., non sono linee di curvatura per quella superficie. I valori (6) soddisfano bensì alla:

$$\frac{dl}{du} \frac{dl}{dv} + \frac{dm}{du} \frac{dm}{dv} + \frac{dn}{du} \frac{dn}{dv} = 0,$$

cioè le linee $u =$ cost., $v =$ cost. sono ortogonali.

Pavia. Febbrajo 1859. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

---

SOGGETTO PER PREMIO PROPOSTO DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE.

Les géomètres connaissent actuellement des méthodes générales qui permettent de décider si deux surfaces données sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, ou, en d'autres termes, s'il est possible de faire correspondre les points de la première à ceux de la seconde suivant une loi telle, que la longueur d'un arc de courbe quelconque tracé sur la première, soit égale à celle de l'arc formé par les points correspondants de l'autre. Les questions qui se rattachent à ce beau problème sont bien loin cependant d'avoir été traitées d'une manière complète, et la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée n'a été entreprise que dans des cas très-particuliers. L'Académie propose ce problème pour sujet du grand prix de Mathématiques en 1860, et met au concours la question suivante:

« Former l'équation ou les équations différentielles des surfaces applicables sur une surface donnée, » traiter le problème dans quelques cas particuliers, soit en cherchant toutes les surfaces applicables sur » une surface donnée, soit en trouvant seulement celles qui remplissent, en outre, une seconde condi- » tion choisie de manière à simplifier la solution. »

L'Académie verrait avec intérêt l'application des formules générales à la détermination des surfaces applicables sur une surface du second degré, et sans en faire, pour les concurrents, une condition obligatoire, elle les invite particulièrement à traiter cette question.

(Le prix consistera dans une médaille d'or de la valeur de trois mille francs. Les Mémoires devront être remis avant le 1r. Novembre 1860). *Comptes Rendus* — 14 *Mars* — 1859.

---

# PUBBLICAZIONI RECENTI

BRIOT et BOUQUET. — Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques. — *Paris* — Chez Mallet-Bachelier. 1859.

OLTRAMARE. — Sur les nombres inférieurs et premiers à un nombre donné.

——— — Sur les séries mixtopériodiques.

——— — Sur les formules algébriques du second degré qui déterminent une suite de nombres premiers — Mémoires de l'Institut National Genevois. Te. IV, Vo — *Genève* 1857—58.

CAYLEY — A memoir on the theory of Matrices —. A Memoir on the Automorphic Linear Transformation of a Bipartite Quadric Function —. Supplementary Researches on the Partition of Numbers.

KIRKMAN — On the Partitions of the R-Pyramid, being the first class of R-gonous X-edra. Philosophical Transactions —. Vol. 148 — Part. 1.

FAÀ DI BRUNO — Théorie générale de l'Élination. *Paris* 1859.

## SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI E SUL NUMERO DEGLI INVARIANTI.

### NOTA

**DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS.**

Credo utile tener sott'occhio le tavole delle partizioni dei numeri in parti di dato numero e che non superino un dato limite. Io ne faccio l'applicazione alla determinazione del numero degli invarianti delle forme binarie.

§. 1. *Teorema*. Il numero $B_\mu^{(n,p)}$ delle soluzioni delle due equazioni

$$\text{(I)} \qquad \alpha_0+\alpha_1 \ldots\ldots + \alpha_n = p\,, \qquad n\alpha_n + (n-1)\alpha_{n-1} \ldots\ldots + 2\alpha_2 + \alpha_1 = \mu$$

(essendo $\alpha_0$, ..... $\alpha_n$ $(n+1)$ incognite suscettibili di ogni valore intero positivo, non escluso lo zero) è uguale al numero $B_\mu^{(p,n)}$ delle soluzioni del sistema di equazioni

$$\text{(II)} \qquad \beta_0+\beta_1 \ldots\ldots + \beta_p = n\,, \qquad p\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} \ldots\ldots + 2\beta_2 + \beta_1 = \mu\,.$$

Infatti ogni soluzione delle (I) consiste nella *partizione* del numero $\mu$ in $\alpha_n$ numeri eguali ad $n$, .... $\alpha_2$ numeri eguali a 2, $\alpha_1$ eguali ad 1, ed $\alpha_0$ eguali allo zero, essendo $p$ il numero totale delle parti; ed a questa partizione corrisponde come *conjugata* l'altra

$$(\alpha_n+\alpha_{n-1} \ldots + \alpha_1) + (\alpha_n+\alpha_{n-1} \ldots + \alpha_2) + \ldots + (\alpha_n+\alpha_{n-1}) + \alpha_n = \mu,$$

nella quale lo stesso numero $\mu$ è spartito in tutto al più $n$ parti, ognuna delle quali è uguale o inferiore a $p$, le quali parti sono quelle indicate con $p$, $(p-1)$, .... 2, 1 nella seconda delle (II), i loro numeri essendo $\beta_p$, .... $\beta_2$, $\beta_1$. Così per esempio alla partizione

$$7.0 + 6.1 + 5.0 + 4.3 + 3.3 + 2.0 + 1.2 = 29$$

(ossia 644433311) del numero 29 corrisponde l'altra partizione

$$9 + 7 + 7 + 4 + 1 + 1 = 29\,,$$

ossia $\quad 9.1 + 8.0 + 7.2 + 6.0 + 5.0 + 4.1 + 3.0 + 2.0 + 1.2 = 29.$

2. *Teorema*. I predetti numeri $B_\mu^{(n,p)}$ dipendono gli uni dagli altri mediante le relazioni

$$(2) \qquad B_\mu^{(n,p)} = B_\mu^{(n-1,p)} + B_{\mu-n}^{(n,p-1)}\,, \qquad (3) \qquad B_\mu^{(n,p)} = B_\mu^{(n,p-1)} + B_{\mu-p}^{(n-1,p)}\,;$$

a motivo della (1) $B_\mu^{(n,p)} = B_\mu^{(p,n)}$ esse sono conseguenze l'una dell'altra: del resto possono ambedue dimostrarsi rispetto al numero $B_\mu^{(n,p)}$ delle partizioni di $\mu$ in $p$ parti

non superiori ad $n$. Infatti tali partizioni si separano in due parti, cioè quelle che non contengono il numero $n$, il cui numero è per conseguenza $B_{\mu}^{(n-1,p)}$, e quelle che contengono il numero $n$, tolto il quale rimangono le partizioni di $\mu - n$ in $p - 1$ parti, il cui numero è $B_{\mu-n}^{(n,p-1)}$, così resta dimostrata la (2). Per dimostrare la (3) separiamo tutte le $B_{\mu}^{(n,p)}$ in due parti, quelle cioè che contengono almeno uno zero (ossia, il cui numero delle parti non supera $p-1$) e che sono in numero $B_{\mu}^{n,p-1}$, e quelle che non contengono alcuno zero, e di cui perciò ciascuna parte può diminuirsi d'un'unità, sicchè ne provengono le $B_{\mu-p}^{(n-1,p)}$. Ecco per esempio le 9 partizioni del numero 7 in 5 parti non superiori a 4, separate in due parti in guisa da dimostrare le predette soluzioni, che in tal caso sono

$$9 = 6 + 3 \ , \qquad 9 = 7 + 2$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 3 0 0 0 | | 3 0 0 0 | 4 3 0 0 | |
| 4 2 1 0 0 | | 2 1 0 0 | 4 2 1 0 | |
| 4 1 1 1 0 | | 1 1 1 0 | 4 1 1 1 | |
| 3 3 1 0 0 | 3 3 1 0 0 | | 3 3 1 0 | |
| 3 2 2 0 0 | 3 2 2 0 0 | | 3 2 2 0 | |
| 3 2 1 1 0 | 3 2 1 1 0 | | 3 2 1 1 | |
| 3 1 1 1 1 | 3 1 1 1 0 | | | 2 0 0 0 0 |
| 2 2 2 1 0 | 2 2 2 1 0 | | 2 2 2 1 | |
| 2 2 1 1 1 | 2 2 1 1 1 | | | 1 1 0 0 0 |

3. *Teorema.* È

(4) $$B_{\mu}^{(n,p)} = B_{np-\mu}^{(n,p)} \ , \qquad (5) \quad B_{\mu}^{n,p} = 0 \quad \text{per} \quad \mu > np \, ;$$

sicchè è sufficiente conoscere i valori dei $B$ corrispondenti a $\mu$ non superiori a $\frac{np}{2}$. La (5) è evidente, e la (4) si dimostra supponendo che a ciascuna delle $p$ parti si sostituisca il suo complemento al numero $n$, nel qual modo la somma $\mu$ diventerà $np - \mu$.

4. *Problema. In quanti modi il numero $N$ può partirsi in $p$ parti ciascuna delle quali sia uno dei termini della progressione aritmetica $c$, $c + d$, $c + 2d \dots$ $c + nd$?* Ciascuna delle parti si diminuisca di $c$ poscia si divida per $d$, in tal modo la loro somma diventerà $\frac{N - cp}{d} = \mu$, e perciò il numero cercato sarà $B_{\mu}^{(n,p)}$. Così le partizioni del numero $N = 15$ in tre numeri dispari non superiori a 9 sono $B_{6}^{(4,3)} = 5$; cioè 951, 933, 771, 753, 555, che dipendono dalle 420, 411, 330, 321, 222.

*Corollario.* Se rimane indeterminato il numero delle parti, bisogna sommare i valori corrispondenti a $p = 1, 2, 3$, ecc. Così per esempio il numero dei modi in cui

N può partirsi nei numeri 2, 3, 4, 5, .... $(2+n)$ è

$$B^{(n,\,1)}_{N-2} + B^{(n,\,2)}_{N-4} + B^{(n,\,3)}_{N-6} + \text{ecc.}$$

5. *Problema. In quanti modi il numero N può partirsi in p parti disuguali scelte nella predetta progressione aritmetica c, c + d, .... c + nd?* In ciascuna partizione le parti prese nell'ordine di grandezza crescente si diminuiscano rispettivamente di $c$, $c+d$, $c+2d$, ...., $c+(p-1)d$, poscia si dividano per $d$, la loro somma diventerà $\dfrac{N-cp}{d} - \dfrac{p(p-1)}{2} = \mu$, ed il numero cercato sarà $B^{(n-p+1,\,p)}_{\mu}$.

*Esempio.* Volendo partire $N = 19$ in tre numeri dispari non superiori a 13, dalle $B^{(n-p+1,\,p)}_{\mu} = B^{(4,\,3)}_{5} = 4$ partizioni 410, 320, 311, 221 dedurremo (raddoppiandone i numeri e sommandovi 5, 3, 1) le 13 5 1, 11 7 1, 11 5 3, 9 7 3.

6. Se il numero $p$ delle parti, nelle quali $\mu$ dee partirsi, è uguale o maggiore di $\mu$ il numero $B^{(n,\,p)}_{\mu}$ delle partizioni non cangia, noi lo segneremo con $B^{(n)}_{\mu}$. Lo stesso avviene se il numero $n$ è uguale o maggiore di $\mu$; sicchè porremo $B^{(\mu,\,p)}_{\mu} = B^{(\mu+1,\,p)}_{\mu} = \text{ecc.} = B^{(p)}_{\mu}$. Finalmente se hanno luogo ambedue queste circostanze scriveremo $B_{\mu}$ in luogo di $B^{(\mu,\,\mu)}_{\mu}$; questo $B_{\mu}$ è dunque il numero delle partizioni di $\mu$ in parti comunque scelte tra i numeri interi, ommettendo di menzionare lo 0, giacchè ora il numero delle parti è indeterminato. Così $B_4 = 5$ esprime il numero delle partizioni 4, 3 1, 2 2, 2 1 1, 1 1 1 1.

7. Mediante la precedente relazione

$$(2') \qquad B^{(n)}_{\mu} = B^{(n-1)}_{\mu} + B^{(n)}_{\mu-n}$$

e cominciando da

$$(6') \qquad B^{(n)}_{0} = 1\,, \qquad \text{e} \qquad (7) \quad B^{(1)}_{\mu} = 1$$

si può calcolare la seguente tavoletta già data dall'Eulero

| $n =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 | | | | | | | |
| 6 | 1 | 4 | 7 | 9 | 10 | 11 | | | | | | |
| 7 | 1 | 4 | 8 | 11 | 13 | 14 | 15 | | | | | |
| 8 | 1 | 5 | 10 | 15 | 18 | 20 | 21 | 22 | | | | |
| 9 | 1 | 5 | 12 | 18 | 23 | 26 | 28 | 29 | 30 | | | |
| 10 | 1 | 6 | 14 | 23 | 30 | 35 | 38 | 40 | 41 | 42 | | |
| 11 | 1 | 6 | 16 | 27 | 37 | 44 | 49 | 52 | 54 | 55 | 56 | |
| 12 | 1 | 7 | 19 | 34 | 47 | 58 | 65 | 70 | 73 | 75 | 76 | 77 |

*

in ciascheduna riga s'intenda ripetuto indefinitivamente l'ultimo numero; così per esempio $B_5^{(8)} = 7$ ; sicchè i numeri della diagonale sono appunto i $B_\mu$ .

8. Le altre tavole si calcolano mediante le (2) (3) cominciando da (6) $B_0^{(n,p)} = 1$, e da (8) $B_\mu^{(1,p)} = 1$ finchè $\mu$ non supera $p$ , e (5) $B_\mu^{(1,p)} = 0$ quando $\mu$ supera $p$.

| | $p = 2$ | $p = 3$ | | $p = 4$ | | | $p = 5$ | | | | $p = 6$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu =$ 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2. | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2. | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3. | 3. | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | 0 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 3. | 5 | 6 | 7 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 6 | | 1 | 3 | 2 | 5. | 7 | 3 | 6 | 8 | 9 | 4. | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | | 0 | 2 | 1 | 4 | 7 | 2 | 6. | 9 | 11 | 3 | 7 | 10 | 12 | 13 |
| 8 | | | 1 | 1 | 4 | 8. | 2 | 6 | 11 | 14 | 3 | 8 | 13 | 16 | 18 |
| 9 | | | 1 | 0 | 3 | 7 | 1 | 6 | 11 | 16 | 2 | 8. | 14 | 19 | 22 |
| 10 | | | 0 | | 1 | 7 | 1 | 5 | 12. | 18 | 2 | 8 | 16 | 23 | 28 |
| 11 | | | | | 1 | 5 | 0 | 4 | 11 | 19 | 1 | 7 | 16 | 25 | 32 |
| 12 | | | | | 0 | 5 | | 3 | 11 | 20 | 1 | 7 | 18. | 29 | 39 |
| 13 | | | | | | 3 | | 2 | 9 | 20 | 0 | 5 | 16 | 30 | 42 |
| 14 | | | | | | 2 | | 1 | 8 | 19 | | 4 | 16 | 32 | 48 |
| 15 | | | | | | 1 | | 1 | 6 | 18 | | 3 | 14 | 32. | 51 |
| 16 | | | | | | 1 | | 0 | 5 | 16 | | 2 | 13 | 32 | 55 |
| 17 | | | | | | 0 | | | 3 | 14 | | 1 | 10 | 30 | 55 |
| 18 | | | | | | | | | 2 | 11 | | 1 | 9 | 29 | 58. |

| | $p=7$ | | | | | | $p=8$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\mu=7$ | 4. | 8 | 11 | 13 | 14 | 15 | 4 | 8 | 11 | 13 | 14 | 15 | 15 |
| 8 | 4 | 9 | 14 | 17 | 19 | 20 | 5. | 10 | 15 | 18 | 20 | 21 | 22 |
| 9 | 3 | 10 | 16 | 21 | 24 | 26 | 4 | 11 | 17 | 22 | 25 | 27 | 28 |
| 10 | 3 | 10 | 19 | 26 | 31 | 34 | 4 | 12 | 21 | 28 | 33 | 36 | 38 |
| 11 | 2 | 10 | 20 | 30 | 37 | 42 | 3 | 12 | 23 | 33 | 40 | 45 | 48 |
| 12 | 2 | 10 | 23 | 35 | 46 | 53 | 3 | 13. | 27 | 40 | 51 | 58 | 63 |
| 13 | 1 | 9 | 23 | 39 | 52 | 63 | 2 | 12 | 28 | 45 | 59 | 70 | 77 |
| 14 | 1 | 8 | 24. | 43 | 61 | 75 | 2 | 12 | 31 | 52 | 71 | 86 | 97 |
| 15 | 0 | 7 | 23 | 46 | 68 | 87 | 1 | 11 | 31 | 57 | 81 | 101 | 116 |
| 16 | | 5 | 23 | 48 | 76 | 100 | 1 | 10 | 33. | 63 | 94 | 120 | 141 |
| 17 | | 4 | 20 | 49 | 81 | 112 | 0 | 8 | 31 | 66 | 103 | 137 | 154 |
| 18 | | 3 | 19 | 49 | 88 | 125 | | 7 | 31 | 70 | 116 | 158 | 194 |
| 19 | | 2 | 16 | 48 | 90 | 136 | | 5 | 28 | 71 | 123 | 176 | 221 |
| 20 | | 1 | 14 | 46 | 94 | 146 | | 4 | 27 | 73 | 134 | 197 | 255 |
| 21 | | 1 | 11 | 43 | 94. | 155 | | 3 | 33 | 71 | 139 | 214 | 284 |
| 22 | | 0 | 9 | 39 | 94 | 162 | | 2 | 21 | 70 | 146 | 233 | 319 |
| 23 | | | 6 | 35 | 88 | 166 | | 1 | 17 | 66 | 147 | 247 | 348 |
| 24 | | | 5 | 30 | 81 | 169 | | 1 | 15 | 63 | 151. | 263 | 383 |

9. *Problema.* Analogamente al problema del § 6. si dimandi in quanti modi $A^{(n)}_\mu$ il numero $\mu$ può partirsi in parti disuguali 1, 2, ..... $n$ senza determinare il numero delle parti. Conforme al § 5 diminuiremo le parti ordinatamente di 1, 2, 3 ..... e siccome il numero delle parti può essere 1, 2, 3, 4 .... , così la loro somma verrà a diminuirsi di 1, 3, 6, 10; perciò

$$A^{(n)}_\mu = B^{(n-1,\,1)}_{\mu-1} + B^{(n-2,\,2)}_{\mu-3} + B^{(n-3,\,3)}_{\mu-6} + \text{ecc.}$$

mediante la (3) due termini successivi possono sommarsi in uno solo, sicchè

$$A^{(n)}_\mu = B^{(n-1,\,2)}_{\mu-1} + B^{(n-3,\,4)}_{\mu-6} + B^{(n-5,\,6)}_{\mu-15} + \text{ecc.}$$

Per esempio

$$A^{(11)}_{21} = B^{(10,2)}_{20} + B^{(8,\,4)}_{15} + B^{(6,\,6)}_{6} = B_0 + B^{(8,\,4)}_{15} + B_6 = 1 + 31 + 11 = 43.$$

Questi $A^{(n)}_\mu$ sono sottoposti alla relazione $A^{(n)}_\mu = A^{(n-1)}_\mu + A^{(n-1)}_{\mu-n}$ poco differente dalla (2').

10. *Numero dei peninvarianti.* Io dico *peninvarianti* di grado $p$ e di indice $\mu$ una funzione intera $P$ delle quantità $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, tale che ogni termine contenga $p$ quantità, i cui indici abbiano la somma $\mu$, e sia $\Delta P = 0$, dove la ca-

ratteristica $\Delta$ indica la derivazione espressa da

$$a_0 \mathrm{D}_{a_1} + 2a_1 \mathrm{D}_{a_2} \ldots + na_{n-1} \mathrm{D}_{a_n},$$

ciascuna D designando l'ordinaria derivazione rispetto alla lettera posta abbasso (Veggansi i miei *Cenni elementari sui discriminanti, invarianti e covarianti* negli Atti dell'I. R. Istituto Veneto per Novembre 1858. Tomo IV pag. 65 e 83 ). Sia per esempio $n = 5$, $p = 4$, $\mu = 6$ il numero dei termini del peninvariante sarà $B_\mu^{(n,p)} = 8$, ed esso avrà la forma

$$Aa_5\, a_1\, a_0^2 + Ba_4\, a_2\, a_0^2 + Ca_4\, a_1^2\, a_0 + Da_3^2\, a_0^2 + Ea_3\, a_2\, a_1\, a_0 + Fa_3\, a_1^3$$
$$+ Ga_2^3\, a_0 + Ha_2^2\, a_1^2$$

mentre la $\Delta P = 0$ conterrà $B_{\mu-1}^{(n,p)} = 6$ termini, e sarà

$$\Delta P = Aa_5\, a_0^3 + (5A + 2B + 2C)a_4\, a_1\, a_0^2 + (4B + 6D + E)a_3\, a_2\, a_0^2$$
$$+ (4C + 2E + 3F)\, a_3\, a_1^2\, a_0 + (3E + 6G + 2H)a_2^2\, a_1\, a_0$$
$$+ (3F + 4H)a_2\, a_1^3 = 0\,;$$

sicchè per determinare 8 coefficienti indeterminati abbiamo 6 equazioni, le quali essendo omogenee danno luogo a due soluzioni essenzialmente differenti (non badandosi ai moltiplicatori comuni); le più semplici sono

$$A=0\,,\ B=0\,,\ C=0\,,\quad D=1\,,\ E=-6\,,\ F=4,\ G=4\,,\quad H=-3\,;$$
$$A=0\,,\ B=1\,,\ C=-1\,,\ D=-1\,,\ E=2\,,\ F=0,\ G=-1\,,\ H=0.$$

Potrebbe nascer il dubbio che le 6 equazioni fossero riducibili ad un minor numero, sicchè il numero dei peninvarianti fosse maggior di due; nulladimeno io credo poter asserire che *: Il numero dei peninvarianti di grado p e di indice* $\mu$ *formati colle quantità* $a_1$, $a_2 \ldots a_n$ *è sempre* $B_\mu^{(n,p)} - B_{\mu-1}^{(n,p)} = E_\mu^{(n,p)}$, *e fra di essi ve ne sarà un numero* $E_\mu^{(n-1,p)}$ *che non conterranno* $a_n$, *un numero* $E_\mu^{(n-2,p)}$ *senza nè* $a_n$ *nè* $a_{n-1}$, *e così in seguito.* — Nel caso precedente, essendo $E_6^{(4,4)} = 7 - 5 = 2$, tutti due i peninvarianti sono senza $a_5$, ed essendo $E_6^{(3,4)} = 5 - 4 = 1$ uno di essi è anche senza $a_4$, appunto come abbiamo trovato. — Col mezzo di relazioni identiche alle (2) (3) e delle $E_0^{(n,p)} = 1$, $E_\mu^{(n,p)} = E_{np+1-\mu}^{(n,p)}$ si possono facilmente calcolare le tavole dei numeri $E_\mu^{(n,p)}$, e le somme delle loro colonne danno i $B_\mu^{(n,p)}$ : ecco le due tavole corrispondenti a $p=9$ ed a $p=10$.

| | $p=9$ | | | | | | | | $p=10$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\mu=0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 8 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 1 |
| 9 | 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 10 | 0 | 1 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 10 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 11 | —1 | 1 | 3 | 6 | 8 | 10 | 11 | 12 | —1 | 1 | 3 | 6 | 8 | 10 | 11 | 11 | 12 |
| 12 | 0 | 1 | 5 | 8 | 12 | 14 | 16 | 17 | 0 | 2 | 6 | 9 | 13 | 15 | 17 | 18 | 19 |
| 13 | —1 | 0 | 2 | 7 | 10 | 14 | 16 | 18 | —1 | 0 | 3 | 8 | 11 | 15 | 17 | 19 | 20 |
| 14 | 0 | 0 | 4 | 8 | 14 | 18 | 22 | 24 | 0 | 1 | 5 | 10 | 16 | 20 | 24 | 26 | 28 |
| 15 | —1 | 0 | 2 | 8 | 13 | 19 | 23 | 27 | —1 | 0 | 3 | 9 | 15 | 21 | 25 | 29 | 31 |
| 16 | 0 | —1 | 3 | 8 | 16 | 22 | 29 | 33 | 0 | 0 | 5 | 11 | 19 | 26 | 33 | 37 | 41 |
| 17 | —1 | —1 | 0 | 7 | 14 | 23 | 29 | 36 | —1 | —1 | 1 | 9 | 17 | 26 | 33 | 40 | 44 |
| 18 | 0 | —1 | 2 | 7 | 18 | 27 | 37 | 44 | 0 | 0 | 4 | 11 | 23 | 33 | 43 | 51 | 58 |
| 19 | —1 | —2 | —2 | 5 | 13 | 26 | 36 | 46 | —1 | —2 | 0 | 8 | 18 | 32 | 43 | 53 | 61 |
| 20 | 0 | —2 | 0 | 5 | 17 | 29 | 44 | 55 | 0 | —1 | 2 | 10 | 24 | 38 | 54 | 66 | 77 |
| 21 | 0 | —1 | —3 | 3 | 13 | 29 | 43 | 59 | —1 | —2 | —2 | 6 | 19 | 37 | 53 | 70 | 81 |
| 22 | 0 | —2 | —2 | 1 | 14 | 29 | 49 | 65 | 0 | —2 | 0 | 7 | 23 | 42 | 64 | 82 | 100 |
| 23 | 0 | —1 | —4 | 0 | 9 | 28 | 47 | 69 | 0 | —2 | —4 | 3 | 17 | 39 | 62 | 86 | 105 |
| 24 | 0 | —1 | —2 | —1 | 12 | 29 | 51 | 77 | 0 | —1 | —1 | 4 | 22 | 45 | 74 | 101 | 127 |

11. Applicando il precedente metodo ai peninvarianti, nei quali si lascia indeterminato e il grado $p$ e il numero $n$ delle quantità (il che è lo stesso come porre $p=n=\mu$) io stabilii nel § 9 della succitata memoria il numero dei peninvarianti di ciascun indice. D'altronde tutti i $B_\mu - B_{\mu-1} = E_\mu$ peninvarianti d'indice $\mu$ risultano dai peninvarianti fondamentali $P_2$, $P_3$, $P_4$, .... $P_\mu$ (che sono i coefficienti della trasformata priva di secondo termine) uno per ciascun indice cominciando dal 2: il Corollario del § 4 ci dà per questo medesimo numero delle partizioni di $\mu$ nei 2, 3, .... $\mu$ un'altra espressione; quindi le differenze nella serie $B_1$, $B_2$, $B_3$ ... sono date da

(9) $$B_\mu - B_{\mu-1} = E_\mu = B^{(1)}_{\mu-2} + B^{(2)}_{\mu-4} + B^{(3)}_{\mu-6} + \text{ecc.}$$

12. Forse non è dimostrato, pure può asserirsi con tutta confidenza, che se $\mu = \frac{np}{2}$ la funzione $P$ soddisfacente alla $\Delta P = 0$ è euritmica rispetto alle quantità $a_0, a_1, \ldots. a_{n-1}, a_n$; e perciò essa è ciò che dicesi un *invariante.* Dunque (§ 10): *Il numero degli invarianti di grado $p$ è* $B^{(n,p)}_{\frac{np}{2}} - B^{(n,p)}_{\frac{np}{2}-1}$, che per brevità segneremo con $E^{(n,p)}$.

13. Cerchiamo tutti gl'invarianti della forma biquadratica, cioè sia $n=4$. Essendo

$$E^{(4,2)} = B^{(4,2)}_4 - B^{(4,2)}_3 = 3 - 2 = 1,$$

si ha un invariante di 3 termini, che è il noto $I^{(2)}_4 = I$ (Veggasi il § 5. dei *Cenni*), Poscia $E^{(4,3)} = 5 - 4 = 1$ c'indica l'invariante di 5 termini $I^{(3)}_4 = J$. Le

$$E^{(4,4)} = 8 - 7 = 1, \quad E^{(4,5)} = 12 - 11 = 1, \quad E^{(4,6)} = 18 - 16 = 2,$$

$$E^{(4,7)} = 24 - 23 = 1, \quad E^{(4,8)} = 33 - 31 = 2, \quad E^{(4,9)} = 2,$$

$$E^{(4,10)} = 2, \quad E^{(4,11)} = 2, \quad E^{(4,12)} = 3, \text{ ecc.}$$

ci mostrano che dev'esservi anche un invariante di 4° grado, uno di 5°, due di 6°, ecc. Ora pel Corollario del § 4. coi due invarianti di 2° e di 3° grado si possono formare $B^{(1,1)}_{p-2} + B^{(1,2)}_{p-4} + B^{(1,3)}_{p-6} +$ ecc. invarianti di $p.^{esimo}$ grado, e questi numeri

$$B^{(1,1)}_{4-2} + B^{(1,2)}_{4-4} = 0 + 1 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 + 1 + 1 = 2, \quad 0 + 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2, \quad 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3, \text{ ecc.}$$

sono appunto i precedenti; dunque non vi è alcun altro invariante primitivo oltre i due $I$, $J$.

14. Per la forma di 5° ordine. cioè quando $n=5$, le $E^{(5,2)}=0$, $E^{(5,6)}=0$, ecc. indicano l'assenza d'invariante di grado imparamente — pari (il che ha luogo ogni qual volta $n$ sia dispari). Si ha poi

$$E^{(5,4)} = 12 - 11 = 1, \quad E^{(5,8)} = 73 - 71 = 2, \quad E^{(5,12)} = 252 - 249 = 3,$$

il che mostra la presenza dei tre invarianti; l'uno $I^{(4)}_5$ ha appunto 12 termini (Veggasi *Cenni* § 6) l'altro $I^{(8)}_5$, che il Sig. Faà di Bruno disse primitivo (*Annali* 1856, pag. 86) dev'essere corretto come segue:

$$a^3cdf^3 - a^2b^2df^3 - 3a^2bc^2f^3 + 5ab^3cf^3 - 2b^5f^3 - a^3ce^2f^2 + a^2b^2e^2f^2 - 3a^3d^2ef^2 +$$
$$+ 11a^2bcdef^2 - 5ab^3def^2 + 12a^2c^3ef^2 - 30ab^2c^2ef^2 + 15b^4cef^2 + 12a^2bd^3f^2 -$$
$$- 21a^2c^2d^2f^2 - 34ab^2cd^2f^2 + 22b^4d^2f^2 + 78abc^3df^2 - 48b^3c^2df^2 - 27ac^5f^2 +$$
$$+ 18b^2c^4f^2 + 5a^3de^3f - 5a^2bce^3f - 30a^2bd^2e^2f - 34a^2c^2de^2f + 133ab^2cde^2f -$$
$$- 54b^4de^2f - 18abc^3e^2f + 3b^3c^2e^2f + 78a^2cd^3ef - 18ab^2d^3ef - 220abc^2d^2ef +$$
$$+ 106b^3cd^2ef + 93ac^4def - 30b^2c^3def - 9bc^5ef - 27a^2d^5f + 93abcd^4f -$$
$$- 38b^3d^4f - 42ac^3d^3f + 8b^4c^2d^3f + 6bc^4d^2f - 2a^3e^5 + 15a^2bde^4 + 22a^2c^2e^4 -$$
$$- 54ab^2ce^4 + 27b^4e^4 - 48a^2cd^2e^3 + 3ab^2d^2e^3 + 106abc^2de^3 - 81b^3cde^3 -$$
$$- 38ac^4e^3 + 38b^2c^3e^3 + 18a^2d^4e^2 - 30abcd^3e^2 + 38b^3d^3e^2 + 8ac^3d^2e^2 +$$
$$+ 25b^2c^2d^2e^2 - 57bc^4de^2 + 18c^6e^2 - 9abd^5e + 6ac^2d^4e - 57b^2cd^4e + 74bc^3d^3e -$$
$$- 24c^5d^2e + 18b^2d^6 - 24bc^2d^5 + 8c^4d^4 ;$$

esso è il più comodo da trovarsi, ed ha 68 termini, mentre il discriminante

$$D_5 = (I_5^{(4)})^2 - 128\, I_5^{(8)}$$

ne ha soltanto 59. Il $I_5^{(12)}$ calcolato dal predetto autore ha 232 termini, ma non si può garantire l'esattezza.

15. Se $n = 6$ le $E^{(6,1)} = 0$, $E^{(6,3)} = 0$, ecc. mostrano che non vi sono invarianti di grado dispari (ciò vale ogni qual volta $n$ sia imparamente — pari). Poscia

$$E^{(6,2)} = 4 - 3 = 1, \quad E^{(6,4)} = 18 - 16 = 2, \quad E^{(6,6)} = 58 - 55 = 3,$$

$$E^{(6,8)} = 151 - 147 = 4, \quad E^{(6,10)} = 338 - 332 = 6, \quad E^{(6,12)} = 8, \text{ ec.}$$

gli invarianti primitivi $I_6^{(2)}$ di 4 termini, $I_6^{(4)}$ di 16 termini, e $I_6^{(6)}$ danno i seguenti numeri d'invarianti

$$B_1^{(3)} = 1, \quad B_2^{(3)} = 2, \quad B_3^{(3)} = 3, \quad B_4^{(3)} = 4, \quad B_5^{(3)} = 5, \quad B_6^{(3)} = 7, \text{ ecc.};$$

perciò vi dev'essere un invariante primitivo di 10.$^{mo}$ grado, il quale sarà quasi per certo il discriminante $D_6$. Ritengo per vero che gli invarianti primitivi sieno tra loro indipendenti anche col mezzo delle loro potenze.

16 Quando $n = 8$ si ha

$$E^{(8,2)} = 5 - 4 = 1, \quad E^{(8,3)} = 13 - 12 = 1, \quad E^{(8,4)} = 33 - 31 = 2,$$
$$E^{(8,5)} = 73 - 71 = 2, \quad E^{(8,6)} = 151 - 147 = 4, \quad E^{(8,7)} = 289 - 285 = 4,$$
$$E^{(8,8)} = 526 - 519 = 7, \quad E^{(8,9)} = 910 - 902 = 8,$$
$$E^{(8,10)} = 1514 - 1502 = 12, \quad E^{(8,11)} = 13, \quad E^{(8,12)} = 20,$$

sicchè vi è un invariante primitivo per ciascuno dei gradi 2, 3, .... 9, 10; infatti (veggasi il Corollario del § 4) $B^{(8,1)}_{p-2} + B^{(8,2)}_{p-4} + B^{(8,3)}_{p-6} +$ ecc. dà i numeri

$$1,\ 1,\ 1+1=2,\ 1+1=2,\ 1+2+1=4,\ 1+2+1=4,\ 1+3+2+1=7,$$
$$1+3+3+1=8\ ,\quad 1+4+4+2+1=12\ ,$$
$$0+4+5+3+1=13\ ,\quad 0+5+7+5+2+1=20,$$

che sono appunto i numeri precedenti. Continuando i calcoli si riconosce l'esistenza anche di un invariante primitivo di 14.° grado; forse esso sarà il discriminante.

17. *Gli invarianti primitivi* per $n=7$ sono uno di 4.° grado, tre di 8.°, ed altri 6 di 12.° grado ecc. — Per $n=9$ sono due di 4.° grado, altri 5 di 8.°, ecc. — Per $n=10$ sono uno di 2.° grado, uno di 4.°, 4 di 6.°, 5 di 8.°, ecc. — Per $n=11$ sono due di 4.°, 10 di 8.°, ecc. — Per $n=12$ sono uno di 2.°, uno di 3.°, due di 4.°, due di 5.°, 5 di 6.°, 5 di 7.°, 8 di 8.°, ec. — Per $n=13$ sono due di 4.°, ecc. — Per $n=14$ sono uno di 2.°, due di 4.°, ecc.

18. *Quanti sono i covarianti primitivi della forma cubica* ? Se $p$ è il grado e $\mu$ l'indice del primo coefficiente $v^{(p,m)}$ del covariante $V^{(m,p)}$ d'ordine $m$ si ha (*Cenni* ec. § 14) $m=3p-2\mu$ e il massimo indice contenuto in $v^{(m,p)}$ è 3. Il numero dei peninvarianti $v^{(p,m)}$ è dato (§ 10) da $E^{(n,p)}_{\mu}$, ora si ha $E^{(3,2)}_{2}=1$, e siccome anche $E^{(2,2)}_{2}=1$, così il primo covariante è dato da

$$v^{(2,2)}=a_2 a_0 - a_1^2 .$$

Poscia $E^{(3,3)}_{3}=1$ conduce a trovare

$$v^{(3,3)}=a_3 a_0^2 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1^3 .$$

Similmente $E^{(3,4)}_{4}=E^{(2,4)}_{4}=1$ indica l'esistenza di un $v^{(4,4)}$ senza $a_3$, il quale non può essere altro che $(v^{(2,2)})^2$, ed anche il covariante sarà $(V^{(2,2)})^2$, cioè non primitivo. La $E^{(3,5)}_{5}=1$ dà un $v^{(5,5)}$ che è il prodotto $v^{(2,2)}\,.\,v^{(3,3)}$. Abbiamo $E^{(3,6)}_{6}=2$ e perciò due peninvarianti, uno dei quali sarà compreso in $E^{(3,5)}_{6}=E^{(3,4)}_{6}=1$, e l'altro in $E^{(2,6)}_{6}=1$, e perciò avremo un $v^{(4,0)}$, che è il discriminante, ed un $v^{(6,6)}$ che è il $(v^{(2,2)})^3$. La $E^{(3,7)}_{7}=8-7=1$ indica il $v^{(7,7)}=(v^{(2,2)})^2\,(v^{(3,3)})$. La $E^{(3,8)}_{8}=2$ si riduce alle due

$$E^{(3,6)}_{8}=8-7=1\ ,\quad E^{(2,8)}_{8}=5-4=1\ ,$$

che mostrano l'esistenza di un peninvariante

$$v^{(6,2)}=v^{(4,0)}.\,v^{(2,2)},\quad \text{e di un}\quad v^{(3,8)}=(v^{(2,2)})^4.$$

Così abbiamo trovato $v^{(2,2)}$, $v^{(3,3)}$ ed il discriminante $v^{(4,0)}$, e credo che tutti gli altri dipendano dai loro prodotti, peraltro noi possiamo moltiplicarli per $a_0^i$, il che

ne accresce il grado di $i$ e non ne muta l'indice $\mu$; dunque avremo pel primo coefficiente di ogni covariante della forma cubica le tre formule

$$a_0^i\, v^{(2,2)} = v^{(2+i,\, 2+3i)}\,, \quad a_0^i\, v^{(3,3)} = v^{(3+i,\, 3+3i)}\,, \quad a_0^i\, v^{(4,0)} = v^{(4+i,\, 3i)}\,,$$

l'ultima delle quali è esprimibile col mezzo del cubo della prima e del quadrato della seconda.

## NOTA

Ad ogni studioso della matematica si mostra la difficoltà ognora crescente di conoscere ciò che fecero gli altri; per supplire in qualche modo alla mancanza di opere generali, ed anche di repertorii od indici dei Giornali e degli Atti delle Accademie, io proporrei uno spediente. Ognuno che tratta un argomento indichi tutti gli Autori, che, per quanto egli ricorda, hanno pubblicato intorno al medesimo; chiunque altro scriva dello stesso oggetto ripeta quelle indicazioni aggiungendo le altre, che avrà potuto raccogliere; così continuando si potrà sperare che si mantenga la memoria di quanto fu trovato su ciascun argomento. Accompagno al consiglio l'esempio riguardo alla partizione dei numeri. — Eulero, Introd. in anal. infin. I. § 297. — N. Comm. Acad. Petropolitanae T. III. 1750 pag. 15, 125, et T. XIV. 1769 pag. 168. — Paoli, M. Soc. Italiana 1784. II. pag. 787. — Petri Pauli Liburnensis Opusculum II. — Brunacci, Matem. subl. I § 108. Comp. del Calc. subl. 1811. § 114. — Lacroix, Traité Calc. diff. et int. 1819. III. § 1193. — Legendre, Th. des Nombres 1830. II. pag. 128. — Brianchon, J. Ec. polyt. 1837. XXV. pag. 166. — Catalan, J. Liouv. 1838 III. pag. 111. — Rodrigues, J. Liouv. 1839. IV. p. 236. — Jacob, J. Crelle 1846. XXXII. p. 164.— Stern, J. Crelle 1840 XXI p. 91, 177.— Sylvester, Ann. Tortol. 1857. VIII p. 12. — Quarterly, J. 1855 p. 141. — Brioschi, A. Tortol. 1857. VIII. p. 5. — Cayley, A. Tortol. 1858 I. pag. 323.

Padova, Marzo 1859.

---

## SUR LA COURBURE D'UNE SÉRIE DE SURFACES ET DE LIGNES,

**PAR T. A. HIRST.**

(Continuazione e fine V. pag. 112.)

### III.

*Sur la courbure des surfaces dérivées.*

23. En suivant toujours la marche proposée au n.º 3 nous allons étudier premièrement la courbure aux points correspondants de deux surfaces inverses $S_1$ et $S'$. Par la théorie générale de ces surfaces ([1]) on sait, 1° que les normales en deux points correspondants $m_1$ et $m'$ se coupent de manière à former avec le rayon vecteur un triangle isocèle à base $m_1 m'$, 2.º que, pour ces points, les centres de courbure $c_1$ et $c'$ de deux sections normales *correspondantes* sont en ligne droite avec l'origine. En observant donc qu'ici le rayon vecteur, les deux normales, et la ligne menée par les centres de courbure forment un système qui ne diffère en rien de celui déjà considéré au n.º 13, on a de suite

$$\frac{r_1}{\mu_1 \rho_1} + \frac{r'}{\mu_1 \rho} + 2 = 0\,; \tag{21}$$

où $\rho_1$ et $\rho$ désignent les rayons de courbure de deux sections normales correspondantes de $S_1$ et $S'$, dont les signes sont déterminés comme au n.º 13; c'est-à-dire que *chaque rayon de courbure est positif ou négatif selon que le centre de courbure et l'origine sont de côtés opposés ou du même côté par rapport au plan tangent.*

Mais on sait que les sections principales de $S_1$ et $S'$ se correspondent deux à deux ([1]), en sorte que si $\rho'_1$, $\rho''_1$, $\rho'$, $\rho''$ désignent les rayons de courbure de ces sections on aura deux équations de la forme (21) lesquelles, en faisant pour abréger

$$\frac{2}{R_1} = \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho''_1}, \quad \frac{2}{R'} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''},$$

donneront par addition et multiplication

$$\begin{aligned} &\frac{r_1}{\mu_1 R_1} + \frac{r'}{\mu_1 R'} + 2 = 0\,, \\ &\frac{1}{\mu_1}\,\frac{r_1 r_1}{\rho'_1 \rho''_1} + \frac{2r_1}{R_1} = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{r' r'}{\rho' \rho''} + \frac{2r'}{R'}. \end{aligned} \tag{22}$$

(1) Voir la Note I à la fin du Mémoire.

Observons dès à present que les $\rho_1$, $\varrho$ de l'équation (21), et en général les rayons de courbure sans accents supérieurs appartiendront aux sections normales dont les plans passent par l'origine.

24. Passons maintenant aux deux surfaces S, S' réciproques polaires. On sait qu'en général on peut trouver une surface $\Sigma$ du second ordre qui aura son centre à l'origine et sera osculatrice à la surface S en un point $m$ quelconque ([1]). Cela étant le théorème du n.° 12 fait voir que la surface $\Sigma'$, réciproque polaire de $\Sigma$, osculera la surface S' au point correspondant $m'$; en sorte qu'il suffira d'étudier la courbure aux points correspondants de deux surfaces du second ordre, réciproques polaires par rapport à leur centre commun; surfaces qui sont toujours de même espèce, dont les axes principaux ont mêmes directions et valeurs réciproques. Pour fixer les idées admettons que $\Sigma$ et $\Sigma'$ soient des ellipsoïdes et par leur centre commun, l'origine, menons deux plans parallèles aux plan tangents de $\Sigma$ et $\Sigma'$ en $m$ et $m'$ et par conséquent perpendiculaires respectivement aux rayons vecteurs $r' = om'$, $r = om$. Soient E et E' les sections elliptiques de $\Sigma$ et $\Sigma'$ déterminées par ces plans; ce seront des indicatrices de S et S' aux points $m$ et $m'$. Il est clair que les plans polaires des divers points de E, étant tous parallèles aux rayon vecteur $r'$, envelopperont un cylindre circonscrit à $\Sigma'$ selon l'ellipse E'. En même temps les traces de ces plans polaires sur le plan de E, qui les coupe orthogonalement, ces traces dis-je envelopperont une conique qui sera à la fois projection de E' et réciproque polaire de E, donc : *chacune des ellipses* E, E' *est la réciproque polaire de la projection de l'autre sur le plan de la première.*

Cela posé il sera facile de déterminer les relations entre les demi-axes $a, b, a'$, $b'$ des ellipses E et E' d'où dépendent, comme on sait, les rayons de courbure $\rho'$, $\rho''$, $\varrho'$, $\varrho''$ de $\Sigma$ et $\Sigma'$, ou ce qui revient au même, de S et S'. En effet soient $2\alpha$, $2\alpha'$ les diamètres de E et E' dans le plan des rayons vecteurs; $2\beta$, $2\beta'$ les diamètres perpendiculaires à ceux-là, et qui coïncident en direction avec l'intersection des plans de E et E'. On sait que

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\,, \qquad \frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{\alpha'^2}+\frac{1}{\beta'^2}\,. \tag{23}$$

Mais la projection de E sur le plan de E', étant la réciproque polaire de E' sera une ellipse $E_0$ ayant $\frac{k^2}{a'}$, $\frac{k^2}{b'}$ pour demi-axes dirigés dans le même sens que $a'$ et $b'$. D'un autre côté l'angle des plans de E et E' étant évidemment égal à l'angle $\psi$ des rayons vecteurs, les demi-diamètres $\alpha$ et $\beta$ de E auront pour projections deux demi-

(1) Dupin : Développements de Géométrie, p. p. 13 et 31.

diamètres rectangulaires $\alpha \cos\psi$ et $\beta$ de $E_0$; en sorte que pour cette ellipse

$$\frac{a'^2}{k^4}+\frac{b'^2}{k^4}=\frac{1}{\mu_1^2\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2},$$

où pour abréger $\mu_1=\cos\psi$, $\nu_1=\sin\psi$. Cette équation au moyen des dernières devient

$$a'^2+b'^2=k^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\right). \qquad (24)$$

On obtient une autre relation entre les mêmes demi-axes en considérant les aires des ellipses E, $E_0$, E'. En effet l'aire de $E_0$ étant la projection de celle de E sera égale à $\pi\mu_1 a b$, pendant que $\frac{k^2}{a'}$, $\frac{k^2}{b'}$ étant les demi-axes de $E_0$ cette même aire sera exprimée par $\frac{\pi k^4}{a'b'}$; donc en égalant ces deux expressions on a

$$\mu_1\, a\, b\, a'\, b'=k^4 \qquad (25)$$

25. Pour connaître sans ambiguité les directions relatives des axes de E et E', et par suite celles des lignes de courbure de S et S', soit

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1 \qquad (E_0)$$

l'équation de l'ellipse $E_0$ par rapport aux demi-diamètres $\alpha'$, $\beta'$ pris respectivement pour axes de $x$, $y$. En y mettant $\mu_1 x$ au lieu de $x$ on obtient l'équation

$$A\mu_1^2x^2+2B\mu_1xy+Cy^2=1 \qquad (E)$$

de l'ellipse E, dont $E_0$ est la projection, par rapport aux directions des demi-diamètres $\alpha$, $\beta$. D'un autre côté l'ellipse E', réciproque polaire de $E_0$, aura comme on sait (1) l'équation

$$Cx^2-2Bxy+Ay^2=(AC-B^2)k^4. \qquad (E')$$

En observant que l'ellipse E passe par les points dont les coordonnées sont $x=0$, $y=\beta$ et $x=\alpha$, $y=0$, l'ellipse E' par les points $x=0$, $y=\beta'$ et $x=\alpha'$, $y=0$: et en se rappelant que la différence $AC-B^2$, qui reste la même quelque soient les axes de coordonnées rectangulaires de l'équation $E_0$, a pour valeur la réciproque du produit des carrés des axes $\frac{k^2}{a'}$, $\frac{k^2}{b'}$ de $E_0$, on verra facilement que (E) et (E') peuvent être écrites de la manière suivante:

---

(1) Voir la Note II à la fin du Mémoire.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+2B\mu_1 xy+\frac{y^2}{\beta^2}=1\,,\qquad \frac{x^2}{\alpha'^2}-\frac{2Bk^4}{a'^2\,b'^2}xy+\frac{y^2}{\beta'^2}=1\,.$$

Cela posé soit $\varphi$ l'angle que fait un des axes de E avec l'axe des $x$ ou, ce qui est la même chose, avec le plan des rayons vecteurs $r$, $r'$; on aura par une formule connue :

$$\text{cotang } 2\varphi=\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{1}{2B\mu_1}=\left(\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{1}{2B\mu_1}\,,$$

et pareillement pour l'ellipse E' on aura :

$$\text{cotang } 2\varphi'=-\left(\frac{2}{\alpha'^2}-\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right)\frac{a'^2b'^2}{2Bk^4}\,;$$

par conséquent, en ayant égard à l'équation (25), il viendra

$$\text{cotang } 2\varphi' : \text{cotang } 2\varphi=-\left(\frac{2}{\alpha'^2}-\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right):\frac{\mu_1\,a^2b^2}{k^4}\left(\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),\qquad(26)$$

26. Pour transformer les relations (24), (25), (26) en d'autres relatives aux courbures des surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$, ou plutôt des surfaces S et S', on n'a qu'à se rappeler que chaque demi-diamètre $\alpha$ de l'ellipse E est, au signe près, la moyenne géométrique entre le rayon de courbure $\rho$ de la section normale de $\Sigma$ parallèle à ce diamètre et la perpendiculaire $r\mu_1$ abaissée de l'origine sur le plan tangent au point $m$ qu'on considère (1). En substituant donc

$$\alpha^2=-\mu_1 r\rho\,,\qquad a^2=-\mu_1 r\rho'\,,\qquad b^2=-\mu_1 r\rho''\,,$$

$$\alpha'^2=-\mu_1 r'\varrho\,,\quad a'^2=-\mu_1 r'\varrho'\,,\quad b'^2=-\mu_1 r'\varrho''\,,$$

et en observant que $rr'\mu_1=k^2$, les trois équations en question deviennent :

$$\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{r'\,r}{\varrho'\,\varrho''}=\mu_1\,\frac{\rho'\,\rho''}{rr}\,,\qquad \frac{2r'}{R'}=\mu_1^2\,\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{2r}{R}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{r}{\rho}\right)$$

$$\text{cotang } 2\varphi' : \text{cotang } 2\varphi=-\left(\frac{r'}{\varrho}-\frac{r'}{R'}\right):\mu_1\,\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{r}{\rho}-\frac{r}{R}\right).\qquad(27)$$

Conformément à la deuxième de ces relations on aura évidemment

$$\frac{2r}{R}=\mu_1^2\cdot\frac{\varrho'\varrho''}{r'\,r'}\left(\frac{2r'}{R'}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{r'}{\varrho}\right);$$

(1) Dupin. Développements de Géométrie. p. 30.

relation qui au moyen des autres devient

$$\frac{r'}{\rho}=\mu_1^2\cdot\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{2r}{R}-\frac{r}{\rho}\right) \tag{28}$$

27. Pour arriver aux relations entre les éléments de courbure aux points correspondants de la surface primitive S et de sa dérivée positive $S_1$ il suffit, selon le n.º 3, d'identifier les surfaces S' considérées dans les n.^os 23 et 26; c'est-à-dire d'éliminer $\frac{r'}{R'}$, $\frac{r'}{\rho}$, $\frac{r'}{\rho'}$, $\frac{r'}{\rho''}$ des équations (21), (22) au moyen des équations (27), (28). De cette manière, et en se rappellant que $\varphi'=\varphi_1$, on trouve sans peine:

$$\begin{aligned}
&-\frac{r_1}{\mu_1\rho_1}=\mu_1\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{2r}{R}-\frac{r}{\rho}\right)+2,\\
&-\frac{2r_1}{R_1}=\mu_1^2\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{2r}{R}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{r}{\rho}\right)+4\mu_1,\\
&\frac{1}{\mu_1}\frac{r_1 r_1}{\rho'_1\rho''_1}=\mu_1\frac{\rho'\rho''}{rr}+2\mu_1^2\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{2r}{R}+\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\cdot\frac{r}{\rho}\right)+4\mu_1,\\
&\text{cotang }2\varphi_1:\text{cotang }2\varphi=\left(\frac{r_1}{\rho_1}-\frac{r_1}{R_1}\right):\mu_1\frac{\rho'\rho''}{rr}\left(\frac{r}{\rho}-\frac{r}{R}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$ (¹)

Des trois rayons de courbure $\rho'$, $\rho''$, $\rho$ les deux premiers dépendent uniquement de la nature de la surface S, le troisième $\rho$, qui appartient à la section normale faite par un plan qui passe par le rayon vecteur, dépend de la position de l'origine et se trouve lié à l'angle $\varphi$ par la relation connue

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\varphi}{\rho'}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho''},$$

en sorte que la dernière des équations (29) peut être regardée comme une conséquence des trois premières. Il s'agit à present de déduire des trois premières équations les valeurs de $\rho_n$, $R_n$, $(\rho'_n\,\rho''_n)$ qui appartiennent à une dérivée quelconque $S_n$, c'est-à-dire d'exprimer ces quantités en fonction de $\rho$, R, $(\rho'\,\rho'')$, regardées comme trois variables indépendantes qui, pour chaque point de S, ont des valeurs données.

28. Pour cela il sera bon de donner aux équations (29) une autre forme. Concevons le petit cône qui a l'origine pour sommet, et pour base l'élément $ds_n$ de la surface $S_n$. Ce cône interceptera sur une sphère décrite autour de l'origine avec le

(1) J'ai verifié ces relations par l'analyse; les développements, qui ne me paraissent pas sans intéret, peuvent former le sujet d'une prochaine note.

rayon unité un élément de surface que nous désignerons par $\omega_n$ ; entre $ds_n$ et $\omega_n$ on aura ainsi la relation

$$\mu_1\, ds_n = r_n^2\, \omega_n \,.$$

D'un autre côté les normales à la surface $S_n$ menées par les divers points de la courbe qui renferme l'élément $ds_n$ sont évidemment parallèles aux génératrices du cône qui a pour base, sur la dérivée $S_{n+1}$, l'élément $ds_{n+1}$ ( n.° 9 ) ; par conséquent le rapport $\frac{\omega_{n+1}}{ds_n}$ est précisément celui que Gauss a appelé la *mesure* de la courbure de $S_n$ au point qu'on considère; rapport qui a pour valeur, comme on sait, le produit des courbures $\frac{1}{\rho'_n}$, $\frac{1}{\rho''_n}$ des sections principales de $S_n$ (1) . En ayant égard à la dernière équation on a donc pour chaque valeur de $n$, positive ou négative,

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{r_n}{\rho'_n}\frac{r_n}{\rho''_n} = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\,.$$

En introduisant cette relation dans les équations (29) elles deviennent, après quelques reductions ,

$$-\frac{r_1}{\mu_1\rho_1}\,\omega_1 = \qquad -\frac{r}{\rho}\,\omega + \frac{2r}{R}\,\omega + \frac{2}{\mu_1}\cdot\frac{r\,r}{\rho'\rho''}\,\omega,$$

$$-\frac{2r_1}{R_1}\,\omega_1 = \qquad \nu_1^2\frac{r}{\mu_1\rho}\,\omega + \mu_1\frac{2r}{R}\,\omega + 4\,\frac{r\,r}{\rho'\rho''}\,\omega,$$

$$\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{r_1\,r_1}{\rho'_1\,\rho''_1}\,\omega_1 = \omega + 2\nu_1^2\frac{r}{\mu_1\rho}\omega + 2\mu_1\frac{2r}{R}\,\omega + 4\,\frac{r\,r}{\rho'\rho''}\,\omega,$$

$$\text{cotang}\, 2\varphi_1 : \text{cotang}\, 2\varphi = \omega_1\left(\frac{r_1}{\rho_1} - \frac{r_1}{R_1}\right) : \omega\left(\frac{r}{\rho} - \frac{r}{R}\right)\cdot$$

Quant à cette dernière proportion, pour en finir, observons qu'en faisant le produit des $n$ proportions analogues et consécutives on arrivera de suite à celle-ci :

$$\text{cotang}\, 2\varphi_n : \text{cotang}\, 2\varphi = \omega_n\left(\frac{r_n}{\rho_n} - \frac{r_n}{R_n}\right) : \omega\left(\frac{r}{\rho} - \frac{r}{R}\right), \qquad (30)$$

qui est vraie pour toute valeur entière, positive ou négative, de $n$. Quant aux trois autres équations si, en place de S, $S_1$ , on considère les dérivées consécutives $S_{n-1}$ , $S_n$ et si, pour abréger, on pose

(1) *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

$$\frac{r_n}{\mu_1\,\rho_n}\,\omega_n = \xi_n\,,\quad \frac{2r_n}{R_n}\,\omega_n = \eta_n\,,\quad \frac{1}{\mu_1}\,\frac{r_n\,r_n}{\rho'_n\,\rho''_n}\,\omega_n = \omega_{n+1} = \zeta_n\,,$$

on en tirera ce système d'équations, également vraies pour toute valeur entière de $n$:

$$\begin{aligned}
\omega_n &= && && && \zeta_{n-1}\,,\\
\xi_n &= && \mu_1\,\xi_{n-1} && - \eta_{n-1} && - 2\zeta_{n-1}\,,\\
\eta_n &= && -\nu_1^2\,\xi_{n-1} && - \mu_1\,\eta_{n-1} && - 4\mu_1\,\zeta_{n-1}\,,\\
\zeta_n &= \omega_{n-1} && + 2\nu_1^2\,\xi_{n-1} && + 2\mu_1\,\eta_{n-1} && + 4\mu_1\,\zeta_{n-1}\,,
\end{aligned}\qquad (31)$$

d'où l'on voit que chacune des quantités $\omega_n$, $\xi_n$ ... est une fonction linéaire des quantités $\omega_{n-1}$, $\xi_{n-1}$ ..... d'un rang inferieur. Cela étant il est clair que par des substitutions successives on arrivera, *dans le cas de n positive*, à des équations de la forme

$$\begin{aligned}
\omega_n &= A_n\,\omega + A'_n\,\xi + A''_n\,\eta + A'''_n\,\zeta\,,\\
\xi_n &= B_n\,\omega + B'_n\,\xi + B''_n\,\eta + B'''_n\,\zeta\,,\\
\eta_n &= C_n\,\omega + C'_n\,\xi + C''_n\,\eta + C'''_n\,\zeta\,,\\
\zeta_n &= A_{n+1}\,\omega + A'_{n+1}\,\xi + A''_{n+1}\,\eta + A'''_{n+1}\,\zeta = \omega_{n+1}\,,
\end{aligned}\qquad (32)$$

où les coefficients $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ .... sont des fonctions de $n$, $\mu_1$, $\nu_1$, c'est-à-dire de $n$ et $\psi$, qui deviennent respectivement $A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$..... en changeant $n$ en $m$.

29. Pour déterminer ces douze coefficients observons d'abord que si $m$ est un entier positif, $S_{m+n}$ sera la dérivée positive du rang $m$ de la surface $S_n$, donc

$$\begin{aligned}
\omega_{m+n} &= A_m\,\omega_n + A'_m\,\xi_n + A''_m\,\eta_n + A'''_m\,\zeta_n\\
&= A_{m+n}\,\omega + A'_{m+n}\,\xi + A''_{m+n}\,\eta + A'''_{m+n}\,\zeta\,;
\end{aligned}$$

équation qui devant être identique en y mettant pour $\omega_n$, $\xi_n$ .... les valeurs (32), conduira à quatre équations de la forme

$$A_{m+n}^{(i)} = A_m\,A_n^{(i)} + A'_m\,B_n^{(i)} + A''_m\,C_n^{(i)} + A'''_m\,A_{n+1}^{(i)}\,, \qquad (A)$$

où $i$ désigne un des nombres 0, 1, 2, 3. De la même manière on déduira deux autres systèmes de quatre équations de la forme

$$\begin{aligned}
B_{m+n}^{(i)} &= B_m\,A_n^{(i)} + B'_m\,B_n^{(i)} + B''_m\,C_n^{(i)} + B'''_m\,A_{n+1}^{(i)}\,,\\
C_{m+n}^{(i)} &= C_m\,A_n^{(i)} + C'_m\,B_n^{(i)} + C''_m\,C_n^{(i)} + C'''_m\,A_{n+1}^{(i)}\,;
\end{aligned}$$

d'où on voit que les $B_{m+n}^{(i)}$, $B_m$ ..., ou bien les $C_{m+n}^{(i)}$, $C_m$ ..., sont liées entre elles au moyen des quantités $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ . . . . . précisément de la même manière que les

$A^{(i)}_{m+n}$, $A_m$ . . . . ; en sorte que si du système (A) nous parvenons à la forme générale de $A^{(i)}_m$, cette *forme* appartiendra également à $B^{(i)}_m$ et $C^{(i)}_m$, lesquelles quantités ne peuvent différer de $A^{(i)}_m$ que par quelques constantes, indépendantes de $m$, qu'on déterminera plus tard au moyen d'un nombre convenable de valeurs initiales.

Faisons donc $n=1$ dans les quatre équations représentées par (A); nous aurons, en ayant égard aux valeurs de $A^{(i)}_1$, $B^{(i)}_1$. . . . tirées des équations (31),

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= A'''_m,\\
A'_{m+1} &= \mu_1 A'_m - \nu_1^2 A''_m + 2\nu_1^2 A'''_m,\\
A''_{m+1} &= - A'_m - \mu_1 A''_m + 2\mu_1 A'''_m,\\
A'''_{m+1} &= A_m - 2A'_m - 4\mu_1 A''_m + 4\mu_1 A'''_m.
\end{aligned}$$

Des trois premières équations, en mettant $n-1$ au lieu de $m$, on tire facilement

$$A''_n = \frac{1}{\nu_1^2}(\mu_1 A'_n - A'_{n-1}), \tag{33}$$

et au moyen de cette relation la deuxième ou la troisième équation devient, en y remplaçant $m$ par $n-1$,

$$A_n = A'''_{n-1} = \frac{1}{2\nu_1^2}(A'_n - A'_{n-2}). \tag{34}$$

Par ces deux relations la quatrième équation devient, en y mettant $n+2$ au lieu de $m$,

$$A'_{n+4} - 4\mu_1 A'_{n+3} + 2(1+2\mu_1^2) A'_{n+2} - 4\mu_1 A'_{n+1} + A'_n = 0. \tag{35}$$

Tout se reduit donc à l'intégration de cette équation aux différences finies de quatrième ordre; car l'intégrale générale avec quatre constantes arbitraires fera connaître la forme commune de $A'_n$, $B'_n$, $C'_n$; et les constantes étant déterminées pour chacune de ces trois coefficients, les valeurs de toutes les autres seront données par les formules (33) et (34).

30. Sans renvoyer aux méthodes connues d'intégration des équations de la forme (35) observons de suite qu'on peut y satisfaire au moyen de la valeur $A'_n = \alpha n x^n$, où $\alpha$ et $x$ sont des quantités indépendantes de $n$, $\alpha$ étant tout-à-fait arbitraire. En effet par la substitution de cette valeur l'équation (35) devient

$$\alpha n x^n (x^2 - 2\mu_1 x + 1)^2 + 4\alpha x^{n+1}(x-\mu_1)(x^2 - 2\mu_1 x + 1) = 0,$$

à laquelle on satisfait en faisant

$$x^2 - 2\mu_1 x + 1 = 0,$$

c'est-à-dire en prenant pour $x$ l'une ou l'autre des racines

$$x = \mu_1 \pm \nu_1\sqrt{-1} = \cos\psi \pm \sin\psi\sqrt{-1}\,,$$

auxquelles répondent les valeurs

$$A'_n = \alpha n x^n = \alpha n(\cos n\psi \pm \sin n\psi\sqrt{-1})\,.$$

On aurait évidemment satisfait à l'équation (35) en faisant plus simplement $A'_n = \alpha x^n$, pourvu que les valeurs de $x$ restent les mêmes; par conséquent, si pour abréger on pose $\mu_n = \cos n\psi$, $\nu_n = \sin n\psi$, on aura ces quatres solutions particulières :

$$\alpha(\mu_n + \nu_n\sqrt{-1})\,,\ \beta n(\mu_n + \nu_n\sqrt{-1})\,,\ \gamma(\mu_n - \nu_n\sqrt{-1})\,,\ \delta n(\mu_n - \nu_n\sqrt{-1}),$$

et l'intégrale générale cherchée, avec quatre constantes arbitraires, sera de la forme

$$A'_n = (\alpha + \beta n)\mu_n + (\gamma + \delta n)\,\nu_n\,,$$

ou ce qui revient au même, de la forme

$$A'_n = (\alpha + \beta n)\,\nu_{n-1} + (\gamma + \delta n)\nu_{n+1}\,. \qquad (36)$$

31. Les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant déterminées au moyen des valeurs initiales $A'_0 = 0$, $A'_1 = 0$, $A'_2 = 2\nu_1^2$, $A'_3 = 8\mu_1\,\nu_1^2$, les formules (33), (34), (36) donnent, toutes reductions faites,

$$\nu_1 A_n = (n-1)\nu_{n-1}\,,\ 2\nu_1 A'_n = (n+1)\nu_{n-1} - (n-1)\nu_{+1}\,,\ \nu_1 A''_n = (n-1)\nu_n. \quad (37)$$

Comme nous avons fait voir au n.º 29 les mêmes formules (33), (34), (36) se prêtent à la détermination des $B_n^{(i)}$, seulement dans ce cas les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de l'équation (36) se trouvent déterminées par les valeurs particulières $B'_0 = 1$, $B'_1 = \mu_1$, $B'_2 = 1 - 4\nu_1^2$, $B'_3 = \mu_1(1 - 12\nu_1^2)$. Après quelques réductions faciles on trouve ainsi :

$$-\nu_1 B_n = n\nu_{n-1}\,,\ -2\nu_1 B'_n = (n+2)\nu_{n-1} - n\nu_{n+1}\,,\ -\nu_1 B''_n = n\nu_n\,. \quad (38)$$

Exactement de la même manière les valeurs initiales

$$C'_0 = 0\,,\ C'_1 = -\nu_1^2\,,\ C'_2 = -8\mu_1\,\nu_1^2\,,\ C'_3 = \nu_1^2(3 - 28\mu_1^2),$$

conduisent aux expressions

$$\begin{gathered}-\nu_1 C_n = n\mu_1\,\nu_{n-1} + (n-1)\nu_n\,,\quad -\nu_1 C'_n = (n+2)\mu_1^2\,\nu_n - n\nu_{n+2}\,,\\ -\nu_1 C''_n = n\mu_1\,\nu_n + (n-1)\nu_{n+1}.\end{gathered} \qquad (39)$$

Enfin en restituant les valeurs de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dans les formules (32) et en observant que selon la formule (34), $A'''_n$, $B'''_n$, $C'''_n$ sont respectivement égales à $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$, on déduit facilement

$$\omega_n = \omega\left(A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{rr}{\rho'\rho''}\right),$$

$$\frac{r_n}{\mu_1 \rho_n} = \frac{B_n + B'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + B''_n \frac{2r}{R} + B_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{rr}{\rho'\rho''}}{A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{rr}{\rho'\rho''}},$$

$$\frac{2r_n}{R_n} = \frac{C_n + C'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + C''_n \frac{2r}{R} + C_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{r}{\rho'} \frac{r}{\rho''}}{A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{r}{\rho'} \frac{r}{\rho''}}, \qquad (40)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{r_n r_n}{\rho'_n \rho''_n} = \frac{A_{n+1} + A'_{n+1} \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_{n+1} \frac{2r}{R} + A_{n+2} \frac{1}{\mu_1} \frac{rr}{\rho'\rho''}}{A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \frac{rr}{\rho'\rho''}};$$

formules dans lesquelles il ne faut que substituer les valeurs (37), (38), (39) pour avoir la solution complète du problème nous nous proposions. Je dis *complète*, car quoique, pour plus de simplicité, nous n'ayons considéré que les dérivées positives de S, et que par conséquent $n$ doive être un entier positif, il n'est pas difficile de voir que ces formules restent vraies même pour des valeurs négatives de $n$. En effet en mettant $h - n$ au lieu de $m$ la formule (A) devient

$$A_h^{(i)} = A_{h-n} A_n^{(i)} + A'_{h-n} B_n^{(i)} + A''_{h-n} C_n^{(i)} + A'''_{h-n} A_{n+1}^{(i)},$$

dans laquelle jusqu'ici $n$ a été supposée plus petite que $h$. Mais $A_h^{(i)}$ devant être indépendante de $n$ ce nombre disparaîtra de lui même de la seconde partie de cette équation, d'où il suit que la condition $h > n$ n'est nullement nécessaire. Posons donc $h = 0$; il viendra

$$A_0^{(i)} = A_{-n} A_n^{(i)} + A'_{-n} B_n^{(i)} + A''_{-n} C_n^{(i)} + A'''_{-n} A_{n+1}^{(i)},$$

et les équations (32), après les avoir multipliées respectivement par $A_{-n}$, $A'_{-n}$, $A''_{-n}$, $A'''_{n}$, donneront par addition

$$\omega = A_{-n}\,\omega_n + A'_{-n}\,\xi_n + A''_{-n}\,\eta_n + A'''_{-n}\,\zeta_n;$$

car on a évidemment $A_0 = 1$, $A'_0 = A''_0 = A'''_0 = 0$. Mais S étant la dérivée négative du rang $n$ de la surface $S_n$, $\omega$ deviendra $\omega_{-n}$ en posant $\omega, \xi \ldots$ au lieu de $\omega_n$, $\xi_n \ldots$; en sorte que la dernière équation deviendra identique avec celle qu'on obtiendra de la première des équations (32) en y changeant $n$ en $-n$. La généra-

lité des trois dernières des équations (32) se démontre de la même manière, qui du reste n'est pas la seule qu'on pourrait suivre pour cet objet [1].

32. Sans entrer dans une discussion complète des formules que nous venons d'obtenir, indiquons au moins quelques cas particuliers. Soit $m$ le pied d'une des normales abaissées de l'origine sur la surface S; point situé sur toutes les dérivées pour lequel $\psi = 0$, $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = 0$, tandis qu'en général $\lim\left(\frac{\nu_i}{\nu_1}\right) = i \lim\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right) = i$.

Pour ces valeurs on trouve sans peine que :

$$A_n = (n-1)^2,\quad A'_n = 0,\qquad A''_n = n(n-1),$$
$$-B_n = n(n-1),\quad B'_n = 1,\quad -B''_n = n^2,$$
$$-C_n = 2n(n-1),\quad C'_n = 0,\quad -C''_n = 2n^2 - 1;$$

en sorte que les formules (40) fournissent les relations suivantes:

$$\omega_n = \omega\left(n - 1 + n\frac{r}{\rho'}\right)\left(n - 1 + n\frac{r}{\rho''}\right),$$

$$\omega_n\left(\frac{r_n}{\rho_n} - \frac{r_n}{R_n}\right) = \omega\left(\frac{r}{\rho} - \frac{r}{R}\right),$$

$$-\frac{r_n}{\rho_n} = \frac{n + (n+1)\dfrac{r}{\rho'}}{n - 1 + n\dfrac{r}{\rho'}},\qquad -\frac{r_n}{\rho''_n} = \frac{n + (n+1)\dfrac{r}{\rho''}}{n - 1 + n\dfrac{r}{\rho''}}.$$

De la seconde relation, en ayant égard à l'équation (30), on conclut qu'au point $m$ les sections principales de toutes les dérivées sont situées dans les deux mêmes plans. Chacune des deux dernières relations coïncide, pour $\mu_1 = 1$, avec celle déjà donnée au n.° 17, ce qui fait voir que dans le voisinage du point $m$ les sections principales forment deux séries de lignes dérivées. Les résultats auxquels nous étions parvenu directement au n.° 10 sont donc vérifiés.

Si pour surface primitive on prend une sphère autour de l'origine, chacun de ses points $m$ sera du genre de celui que nous venons de considérer, et de plus $\frac{r}{\rho} = \frac{r}{\rho'} = \frac{r}{\rho''} = \frac{r}{R} = -1$. Les relations précédentes donnent évidemment $\frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r_n}{\rho'_n} = \frac{r_n}{\rho''_n} = -1$, $\omega_n = \omega$, comme cela doit être.

---

(1) Voir la Note III.

33. En second lieu soit S une surface de révolution autour d'un axe qui passe par l'origine. Dans ce cas le plan d'une des sections principales passe toujours par l'origine, par conséquent $\tang 2\varphi = 0$ et le rayon de courbure $\rho''$ de cette section devient égal à $\rho$; quant à l'autre section principale son rayon $\rho'$ est égal, au signe près, à la partie de la normale comprise entre la surface et l'axe de révolution; en d'autres termes $\rho(=\rho'')$ et $\rho'$ designent à présent le rayon de courbure et la normale de la courbe génératrice de S. En mettant $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ au lieu de $\frac{1}{\rho''}$, $\frac{2}{R}$ les formules (40) deviennent très simples, en se décomposant en facteurs; on trouve en effet

$$\omega_n = \frac{\omega}{\nu_1}\left(n-1+n\frac{r}{\mu_1\rho}\right)\left(\nu_{n-1}+\nu_n\frac{r}{\rho'}\right),$$

$$-\frac{r_n}{\mu_1\rho_n} = -\frac{r_n}{\mu_1\rho''_n} = \frac{n+(n+1)\frac{r}{\mu_1\rho}}{n-1+n\frac{r}{\mu_1\rho}}, \quad -\frac{r_n}{\rho'_n} = \frac{\nu_n+\nu_{n+1}\frac{r}{\rho'}}{\nu_{n-1}+\nu_n\frac{r}{\rho'}}.$$

La seconde équation ne diffère pas de celle trouvée au n.° 17, comme cela doit être, car les dérivées sont toutes des surfaces de révolution autour du même axe, et leurs courbes génératrices forment nécessairement une série de lignes dérivées. La troisième équation exprime la relation qui existe entre les normales correspondantes des lignes dérivées. On la verifie facilement en observant que dans le triangle formé par le rayon vecteur, la normale, et l'axe de révolution on a, pour chaque valeur de $n$,

$$\frac{r_n}{\rho'_n} = \frac{\sin(\psi-\theta_n)}{\sin\theta_n} = -\frac{\sin\theta_{n+1}}{\sin\theta_n}.$$

Au moyen de cette relation, et de l'équation $\theta_n = \theta - n\psi$, on réduit sans peine la troisième écrite ci-dessus à une identité. En même temps la première équation devient

$$\omega_n = -\omega\left(n-1+n\frac{r}{\mu_1\rho}\right)\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta};$$

équation qui s'accorde avec une de celles du n.° 17; car pour les surfaces de révolution dont il s'agit on a évidemment

$$\omega_n : \omega = \sin\theta_n \,.\, d\theta_n : \sin\theta \,.\, d\theta .$$

La surface primitive S étant quelconque, si en un point $m$ elle est osculée par une surface de révolution dont l'axe passe par l'origine, les dérivées seront osculées aux points correspondants par des surfaces de révolution autour du même axe. Ce cas arrivera, évidemment, toutes les fois que le plan d'une des sections principales

au point $m$ de S passe par l'origine; ce même plan contiendra alors une des sections principales aux points correspondants de toutes les dérivées, et les rayons de courbure de ces sections seront donnés par la deuxième formule précédente. Quant à la suite de sections principales perpendiculaires à celles-là, les centres de courbure sont situés en ligne droite avec l'origine, et les rayons de courbure sont donnés par la troisième formule. Le cas actuel renferme celui où le point $m$ de S est un ombilic; les autres surfaces osculatrices deviennent alors les dérivées d'une sphère dont il a été question au n.° 8.

34. Considérons comme dernier cas particulier celui où S devient une surface développable. Ici la première dérivée n'est plus une surface proprement dite mais, comme on sait, une simple courbe à double courbure. Cependant les formules (40) ne sont pas en défaut, comme on pourrait craindre; elles subsistent encore en considérant cette première dérivée comme une surface tubulaire infiniment étroite. En effet en chaque point $m_1$ de la courbe $S_1$ sont réunis tous les points qui correspondent à ceux d'une même génératrice de S; les normales aux divers points $m$ de cette génératrice, qui sont toutes parallèles au rayon vecteur $om_1$, correspondent deux à deux aux normales de $S_1$ autour du point $m_1$; les normales correspondantes étant situées, comme toujours, dans le plan des rayons vecteurs $om$, $om_1$. Quant aux sections principales de $S_1$ l'une se réduit toujours à un point (son rayon de courbure $\rho''_1$ s'évanouit,) mais l'autre possède un rayon de courbure $\rho'_1$ qui reste fini et déterminé pour chaque normale. En effet selon la loi générale il faut considérer ici, comme centre de courbure de la section principale déterminée par une normale donnée, le point où cette normale est rencontrée par une de celles au point $m'_1$ de $S_1$ infiniment voisin de $m_1$. Ce centre change donc avec le point $m$ de la génératrice de S; il n'est autre que le point où la *droite polaire* au point $m_1$ de $S_1$ est coupée par le plan des rayons vecteurs $om$, $om_1$. En faisant $\frac{1}{\rho''}=0$, $n=1$ dans les formules (40) on trouve en effet $\omega_1=0$, $\rho_1=\rho''_1=0$, comme cela doit être, et ensuite

$$-\frac{r_1}{\rho'_1}=2\mu_1+\frac{\mu_1^2}{\nu_1^2\frac{r}{\rho}+\mu_1^2\frac{r}{\rho'}}, \tag{41}$$

valeur, qui dans le sens ci-dessus expliqué, est facile à vérifier directement. Il y a plusieurs questions, dans lesquelles nous n'entrerons pas, qu'on pourrait résoudre sans peine au moyen de cette formule, par exemple : vers quelle limite le rayon $\rho'_1$ converge-t-il quand le point $m$, en parcourant une même génératrice, s'éloigne infiniment du point $\mu$ de l'arrête de rebroussement ? où sont les points $m$ de cette génératrice qui répondent à la plus grande (infinie) et à la plus petite des valeurs absolues de $\rho'_1$,

et quels sont les lieux de ces points? Cette plus petite valeur de $\rho'_1$ sera évidemment le rayon de courbure *ordinaire* de la courbe $S_1$.

Quant aux autres dérivées de la surface développable S il n'y a aucune difficulté; elles sont toutes des vraies surfaces. Par exemple les points de la surface $S_2$, première dérivée de la courbe $S_1$, qui correspondent au point $m_1$ se trouvent en abaissant des perpendiculaires de l'origine sur tous les plans qui passent par la tangente en $m_1$; leurs pieds seront évidemment sur un petit cercle d'une sphère décrite sur le diamètre $om_1$. En effet la surface $S_2$ est l'enveloppe de telles sphères; le petit cercle en question qui passe toujours par l'origine est la caracteristique de $S_2$, c'est-à-dire l'intersection de deux sphères consécutives, et en même temps une de ses lignes de courbure. Pour chaque point $m_2$ de cette ligne le centre de courbure d'une des sections principales de $S_2$ est évidemment le centre de la sphère génératrice, le point milieu du rayon $om_1$; par conséquent pour tous les points de $S_3$ qui correspondent aux points d'une même génératrice de S on aura $\rho'_2 = -\frac{r_1}{2} = -\frac{r_2}{2\mu_1}$; résultat qu'on peut vérifier facilement en faisant $\frac{1}{\rho''} = 0$, $n = 2$ dans les formules (40).

Il est bon d'observer que deux caractéristiques consécutives de $S_2$ étant sur une même sphère se coupent, non seulement à l'origine mais dans un autre point $M_2$, dont le lieu $\Sigma_2$ est l'arête de rebroussement de $S_2$ et en même temps *la première dérivée positive de la surface* $\Sigma_1$ *lieu des tangentes à la courbe* $S_1$; car $oM_2$ est évidemment perpendiculaire à un plan qui passe par *deux* tangentes consécutives de $S_1$. De ce que deux éléments consécutifs de $\Sigma_2$, sont sur une même sphère il s'ensuit aussi que les plans normaux à ces éléments passent tous deux par le centre de la sphère dont le diametre est $om_1$; c'est-à-dire la droite polaire de $\Sigma_2$ au point $M_2$ divise en parties égales le rayon vecteur $om_1$. En appliquant ce resultat à la surface S et à sa dérivée $S_1$ on voit sans peine que la droite polaire de $S_1$ au point $m_1$ passe par le milieu du rayon vecteur $o\mu$ qui aboutit au point $\mu$ où la génératrice correspondante de S touche son arête de rebroussement; en sorte que pour ce point $\mu$, $\rho'_1 = -\frac{r}{2} = -\frac{r_1}{2\mu_1}$; résultat qu'on vérifie facilement par la formule (41) en observant que pour chaque point de l'arête de rebroussement de S, $\rho = \rho' = 0$.

Nous ne pousserons par plus loin l'examen des diverses dérivées d'une surface développable; observons seulement que la relation entre les dérivées positives et négatives est assez simple, car elles sont des dérivées d'une courbe $S_1$ qui a pour inverse une autre courbe $S'_1$ située avec la première sur un cône ayant son sommet à l'origine. En effet selon les principes du n.° 4 il s'ensuit que $S_{n+1}$ et la surface inverse de $S_{-n+1}$, et par conséquent réciproque polaire de $S_{-n}$, sont tirées de $S_1$

et $S'_1$, respectivement, de la même manière. Ainsi $S_2$ est l'inverse d'une surface développable, et de ce qu'elle est l'enveloppe des sphères ayant pour diamètres les perpendiculaires sur les plans tangents de S, on conclut que $S_{-1}$ est l'enveloppe des paraboloïdes des révolution qui ont l'origine pour foyer commun et qui touchent avec leurs sommets ces mêmes plans tangents; et ainsi de suite.

Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter que l'étude des dérivées d'une surface développable nous fait connaître la nature des points qui, sur les dérivées d'une surface quelconque S, correspondent a un point $m$ où celle-ci est osculée par une surface développable, c'est-à-dire où l'indicatrice devient une parabole. En effet au point $m_1$ de $S_1$ la surface osculatrice deviendra une simple courbe, un des rayons de courbure s'evanouissant; au point $m_2$ de $S_2$ une des lignes de courbure sera osculée par une circonférence qui passe par l'origine; et ainsi de suite.

35. Si dans la première des équations (40) on exprime $\omega_n$ et $\omega$ au moyen des éléments de surface $ds_n$, $ds$, en se servant de la première équation du n.° 28, on aura

$$ds_n = \mu_1^{2n}\left(A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{r\,r}{\rho' \rho''}\right)ds;$$

formule qui se prête au quadrature d'une dérivée quelconque. Mais il est hors de notre objet d'entrer dans les questions de quadrature; nous terminerons ce mémoire en remarquant seulement que pour une surface primitive S fermée autour de l'origine on a en général, pour une valeur entière quelconque de $n$,

$$4\pi = \int \frac{\mu_1}{r^2}\left(A_n + A'_n \frac{r}{\mu_1 \rho} + A''_n \frac{2r}{R} + A_{n+1} \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{r\,r}{\rho' \rho''}\right)ds,$$

où l'integration s'étend sur toute la surface S.

Cette relation remarquable a été constatée dans quelques cas particuliers, et sous d'autres formes, par plusieurs géomètres; entre autres par Gauss, Cauchy, Poisson, Lamé et Tortolini.

Rome. Février 1859.



# NOTE I.

## *Sur les figures inverses.*

Quoique les propriétés des figures inverses, c'est-à-dire aux rayons vecteurs réciproques, soient à present bien connues, il y a peu de livres où on les trouve réunies, c'est pour cela que j'ai pensé faciliter la lecture du mémoire précédent en rappelant en peu de mots les définitions et theorèmes fondamentaux dont je me suis servi. Quant aux démonstrations, souvent très faciles, je les indique seulement dans quelques cas; le lecteur, s'il le veut, trouvera le sujet traité avec plus d'étendue dans un mémoire de M. Stubbs (1), géomètre anglais qui le premier parait avoir proposé cette méthode de transformation des figures, ou dans le beau mémoire de M. Liouville (2) ou dans un opuscule interresant de M. P. Serret (3), ou enfin dans mon mémoire sur les surfaces qui exercent la même attraction (4).

1. *Si les points de deux systèmes correspondent deux à deux de manière que les points* m, m' *de chaque paire soient en ligne droite avec un point fixe* o, *l'origine, et à des distances telles que*

$$om \,.\, om' = constante$$

*les deux systèmes s'appellent* INVERSES *par rapport au point* o.

Selon que l'ensemble des points de chaque système forme une figure, une ligne ou une surface on a des figures, des lignes ou des surfaces inverses, et leurs *points correspondants* seront situés du même côté de l'origine ou de côtés opposés selon que la constante a une valeur positive ou négative. Dans le mémoire cette constante, designée par $k^2$, est toujours positive en sorte qu'on peut la regarder comme le carré du rayon d'une sphère (la sphère d'inversion) autour de l'origine.

2. *Entre les distances correspondantes* mn, m'n' *de deux figures inverses on a la relation*

$$m'n' = \frac{mn}{om \,.\, on} \,.\, k^2.$$

3. *Des points correspondants de deux figures inverses trois paires quelconques sont sur une même sphère* (deux paires quelconque sur une même circonférence) *qui coupe orthogonalement la sphère d'inversion.*

4. *Les éléments correspondants de deux lignes ou de deux surfaces inverses* ( et par conséquent les tangentes ou plans tangents en deux points correspondants) *font des angles égaux avec le rayon vecteur.*

5. *Les normales correspondantes de deux surfaces* (ou lignes) *inverses sont dans un même plan avec le rayon vecteur avec lequel elles font des angles égaux.*

Ces deux theorèmes sont des simples corollaires du n.º 3 d'où l'on voit aussi que deux normales correspondantes se coupent de manière à former un triangle isocèle, qui a pour base la partie du rayon vecteur comprise entre les points correspondants.

6. *L'angle de deux lignes quelconques qui se coupent est égal à l'angle des lignes inverses*

Car $abc$, $a'b'c'$ étant deux triangles correspondants, dont les côtés sont infiniment petits, on déduit sans peine du n.º 2 que

$$ab : bc : ca = a'b' : b'c' : c'a' \,,$$

c'est-à-dire que les deux triangles sont semblables.

7. *L'angle de deux surfaces à un point quelconque de leur intersection est égal à l'angle sous lequel les surfaces inverses se coupent au point correspondant.*

8. *Une droite et un plan ont respectivement pour inverses une circonference et une sphère passant par l'origine.*

Du théorème réciproque, qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter, on voit sans peine que les projections stéréographiques ne sont qu'un cas particulier des figures inverses.

---

(1) *Philosophical Magazine*, Vol. 23, p. 338; 1843.
(2) *Journal de mathématiques*, t. XII, p. 265; 1847.
(3) Des méthodes en Géométrie, par Paul Serret; p. 21; Paris 1855.
(4) *Philosophical Magazine*, Vol. 16, p. 163; 1858.

9. *L'inverse d'une sphère par rapport à un point extérieur ou intérieur est une autre sphère, et l'inverse d'une circonférence par rapport à un point quelconque de son plan est, en général, une circonférence.*

Les centres des deux sphères ou des deux circonférences sont en ligne droite avec l'origine qui est évidemment un de leurs centres de similitudes.

10. *L'inverse d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est aussi une circonférence.*

C'est ce qu'on voit sans peine daprès le n.º 9 en considérant la première circonférence comme l'intersection de deux sphères. Daprès le n.º 3 il est clair, du reste, que ces circonférences inverses sont sur une même sphère, par conséquent elles sont aussi des sections anti-parallèles d'un même cône qui a l'origine pour sommet. Les deux centres qui ne sont plus en ligne droite avec l'origine se trouvent déterminés par le théorème que voici :

11. *Si à une sphère* (A) *passant par l'origine on circonscrit un cône qui la touche selon une circonférence* (a), *l'inverse* (a′) *de cette circonférence aura son centre en ligne droite avec l'origine et le sommet du cône.*

En effet le sommet du cône étant le centre d'une sphère (C) qui coupe (A) orthogonalement, il résulte du n.º 7, en passant aux surfaces inverses, que (a′) est un grand cercle de la sphère (C′) inverse de (C). Mais ces sphères ont leurs centres en ligne droite avec l'origine.

12. *Les cercles osculateurs en deux points correspondants des lignes inverses sont des circonférences inverses.*

Par conséquent les positions relatives des centres de courbure correspondants se trouvent definies en général par le n.º 11, et c'est seulement quand ces lignes sont toutes deux planes que les centres en question sont en ligne droite avec l'origine. Il n'est pas nécessaire d'ajouter que ces centres ne sont pas des points inverses.

13. *Pour les surfaces inverses les centres de courbure de deux sections normales correspondantes sont en ligne droite avec l'origine.*

En effet soient ($\alpha$) et ($\alpha_1$) ces sections normales correspondantes, c'est-à-dire deux sections qui aux points correspondants $m$, $m'$ ont les mêmes directions que celles de deux lignes inverses. A la courbe plane ($\alpha$) correspondra sur la surface inverse une courbe ($\alpha'$) située entièrement sur une sphère (A′) qui passe par l'origine. Cette courbe sphérique ($\alpha'$) aura avec ($\alpha_1$) la même tangente au point $m'$, et pour cercle osculateur ($c'$) en ce point l'inverse du cercle osculateur ($c$) de la section normale ($\alpha$). Mais par le théorème de Meunier le centre $c'$ du cercle qui oscule en $m'$ la courbe sphérique ($\alpha'$) est la projection, sur le plan de ce cercle, du centre de courbure $c_1$ de la section normale ($\alpha_1$), et d'un autre côté la normale $c_1m'$ touche évidemment en $m'$ la sphère (A′) ; en sorte que $c_1$ est précisément le sommet d'un cône circonscrit à la sphère (A′) selon le cercle ($c'$), et le théorème actuel devient ainsi un simple corollaire du n.º 11. Parmi les sections normales au point $m$ il y en aura deux dont les centres de courbures occuperont des positions extrèmes sur la normale, et les sections correspondantes sur la surface inverse jouiront évidemment de la même propriété; mais ce sont des sections principales donc :

14. *L'inverse de chaque ligne de courbure d'une surface est aussi une ligne de courbure de la surface inverse.*

Ce théorème, qui se présente ici comme corollaire d'un autre plus général, se déduit très facilement, au moyen du n.º 7, du théorème bien connu de Dupin sur les surfaces orthogonales. Il sera facile de multiplier ces théorèmes, mais ceux dejà donnés suffiront pour notre objet. Les relations métriques entre les rayons de courbure se trouvent développées dans le mémoire même.

# NOTE II.

Soit

$$u = \mathrm{F}(x, y, z, a, b, \ldots . l)$$
$$= ax^2 + by^2 + cx^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \qquad (\Sigma)$$

l'équation générale d'une surface $\Sigma$ du second ordre. Désignons par P le déterminant

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} a & d & e & g \\ d_1 & b & f & h \\ e_1 & f_1 & c & k \\ g_1 & h_1 & k_1 & l \end{vmatrix}$$

où les éléments conjugués $d$, $d_1$; $e$, $e_1$; ... sont égaux. Soit, de plus,

$$u' = \mathrm{F}(x, y, z, a', b', \ldots . l') = 0 \qquad (\Sigma')$$

l'équation de la réciproque polaire de $\Sigma$ par rapport à la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

ou, ce qui revient au même, l'enveloppe du plan

$$x'x + y'y + z'z + 1 = 0 ,$$

quand $x$, $y$, $z$ sont des coordonnées d'un point de la surface $\Sigma$. On sait que

$$a' = \frac{d\mathrm{P}}{da} , \quad b' = \frac{d\mathrm{P}}{db} , \ldots . f' = \frac{d\mathrm{P}}{df} = \frac{d\mathrm{P}}{df_1} \ldots . . l' = \frac{d\mathrm{P}}{dl} .$$

Pour avoir l'équation de la réciproque polaire de $\Sigma$ par rapport à la sphère réelle représentée par

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 ,$$

on n'a qu'à mettre $-\frac{x}{k^2}$, $-\frac{y}{k^2}$, $-\frac{z}{k^2}$ au lieu de $x$, $y$, $z$ dans l'équation $u' = 0$ ainsi trouvée. Si l'origine est au centre d'une des surfaces, on constate facilement que $\Sigma$ et $\Sigma'$ sont toujours concentriques et de même espèce, et que dans ce cas leurs axes principaux ont les mêmes directions et des valeurs réciproques.

De même si on représente par

$$u' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0 ,$$

la réciproque polaire, par rapport au cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 ,$$

de la conique qui a pour équation

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 ,$$

et si on désigne par P le déterminant

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b_1 & c & e \\ d_1 & e_1 & f \end{vmatrix} ,$$

où $b = b_1$, $d = d_1$, $e = e_1$, on aura

$$a' = \frac{d\mathrm{P}}{da} , \quad b' = \frac{d\mathrm{P}}{db} = \frac{d\mathrm{P}}{db_1} \ldots . . . f' = \frac{d\mathrm{P}}{df} .$$

Si la première conique a son centre à l'origine, on a $d = e = 0$, et en même temps $d' = e' = 0$; en sorte que les deux équations devienent

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0\,,$$

$$u' = cx^2 - 2bxy + ay^2 + \frac{ac - b^2}{f} = 0\,,$$

lesquelles représentent évidemment deux coniques concentriques de même espèce dont les axes ont mêmes directions et valeurs réciproques. En mettant $-\frac{x}{k^2}$, $-\frac{y}{k^2}$ au lieu de $x$, $y$ dans la dernière de ces équations, on trouve pour la réciproque polaire de la première conique ($u$), par rapport au cercle réel

$$x^2 + y^2 = k^2\,,$$

l'équation

$$u' = cx^2 - 2bxy + ay^2 + \frac{ac - b^2}{f} k^2 = 0\,,$$

dont il est question au n.º 25 du mémoire.

# NOTE III.

Les équations

$$\left.\begin{aligned}
\omega_n &= A'_n\ \omega + A'_n\ \xi + A''_n\ \eta + A_{n+1}\ \zeta \\
\xi_n &= B'_n\ \omega + B'_n\ \xi + B''_n\ \eta + B_{n+1}\ \zeta \\
\eta_n &= C'_n\ \omega + C'_n\ \xi + C''_n\ \eta + C_{n+1}\ \zeta \\
\zeta_n &= A_{n+1}\omega + A'_{n+1}\xi + A''_{n+1}\eta + A_{n+2}\ \zeta
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

étant établies pour des valeurs positives de $n$. il y a quatre méthodes différentes pour arriver aux formules analogues pour les dérivées négatives. De ces quatre méthodes celle donnée au n.º 31, qui fait voir qu'on peut changer $n$ en $-n$ dans ces formules, est la plus courte et la plus simple; en sorte que, regardées comme demonstrations de la généralité des formules ($a$), les trois autres méthodes seraient superflues. Mais cette généralité étant admise ces méthodes mènent à des relations entres les coefficients $A_n$, $B_n$ . . . . , plus ou moins dificiles à vérifier directement, qui peuvent être utiles. C'est pour cela que je vais les indiquer en peu de mots.

1.º La surface S étant évidemment la dérivée négative du rang $n$ de la surface $S_n$ on arrivera aux formules dont il s'agit en résolvant les équations ($a$) par rapport a $\omega$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Pour cela désignons par $D_n$ le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} A_n, & A'_n, & A''_n, & A_{n+1} \\ B_n, & B'_n, & B''_n, & B_{n+1} \\ C_n, & C'_n, & C''_n, & C_{n+1} \\ A_{n+1}, & A'_{n+1}, & A''_{n+1}, & A_{n+2} \end{vmatrix}$$

des équations ($a$). Si au moyen des formules (33), (34) du n.º 29 on exprime tous les éléments de $D_n$ en fonction de $A'_i$, $B'_i$, $C'_i$ on reconnaîtra sans peine que

$$D_n = -\frac{1}{4\nu_1^6} \begin{vmatrix} A'_{n-2}, & A'_{n-1}, & A'_n, & A'_{n+1} \\ B'_{n-2}, & B'_{n-1}, & B'_n, & B'_{n+1} \\ C'_{n-2}, & C'_{n-1}, & C'_n, & C'_{n+1} \\ A'_{n-1}, & A'_n, & A'_{n+1}, & A'_{n+2} \end{vmatrix}.$$

Mais, comme nous avons vu au n.° 29, chacune des $A'_i$, $B'_i$, $C'_i$ satisfait à une relation de la forme

$$A'_{n+2} - 4\mu_1 A'_{n+1} + 2(1 + 2\mu_2^1)A'_n - 4\mu_1 A'_{n-1} + A'_{n-2} = 0 ;$$

d'où il résulte, par un théorème élémentaire, que

$$D_n = \frac{1}{4\nu_1^6} \begin{vmatrix} A'_{n+2}, & A'_{n-1}, & A'_n, & A'_{n+1} \\ B'_{n+2}, & B'_{n-1}, & B'_n, & B'_{n+1} \\ C'_{n+2}, & C'_{n-1}, & C'_n, & C'_{n+1} \\ A'_{n+3}, & A'_n, & A'_{n+1}, & A'_{n+2} \end{vmatrix} = D_{n+1} .$$

La valeur de $D_n$ est donc constante, quelque soit $n$ ; du reste pour $n = 1$ cette valeur est visiblement égale à l'unité, par conséquent dans tous les cas

$$D_n = 1 .$$

Cela étant, la solution des équations ($a$), en admettant leur généralité, donne

$$\frac{dD_n}{dA_n^{(i)}} = A_{-n}^{(i)} , \quad \frac{dD_n}{dB_n^{(i)}} = B_{-n}^{(i)} \ldots . \quad \frac{dD_n}{dA_{n+1}} = A_{-n+1} \ldots . ,$$

équations qui, vérifiées directement, fourniraient une démonstration de la généralité en question ; mais cette vérification, quoique elle n'offre pas de difficulté, est un peu pénible.

2.° Soit S' la réciproque polaire de S, on sait par les principes du n.° 4 que $S_n$ aura pour réciproque polaire la dérivée négative $S'_{-n}$. D'un autre côté si on designe par $\omega'_{-n}$, $\xi'_{-n}$ . . . les quantités qui pour la surface $S'_{-n}$ correspondent à $\omega_n$, $\xi_n$ . . . . de sa réciproque polaire $S_n$ les formules du n.° 26 donneront, pour une valeur quelconque de $n$,

$$\omega_n = \zeta'_{-n} , \quad \xi_n = - \mu_1 \xi'_{-n} + \eta'_{-n} , \quad \eta_n = \nu_1^2 \xi'_{-n} + \mu_1 \eta'_{-n} , \quad \eta_n = \omega'_{-n} .$$

Au moyen de ces valeurs on obtient facilement des équations ($a$) les expressions de $\omega'_{-n}$, $\xi'_{-n}$ . . . . en fonction de $\omega'$, $\xi'$ . . . . . . . ; expressions qui doivent être identiques avec celles qu' on obtiendrait directement des mêmes équations ($a$) en y mettant $-n$ au lieu de $n$. De cette identité on déduit des nouvelles valeurs de $A_{-n}^{(i)}$, $B_{-n}^{(i)}$ . . . . en fonction de $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ . . . . ; valeurs qui peuvent être vérifiées facilement au moyen des formules (37), (38), (39) du n.° 31, si toutefois on veut constater de cette manière la généralité des équations ($a$).

3.° Si S et S', au lieu d'être des réciproques polaires, étaient des surfaces *inverses* on aurait par les formules du n.° 23, pour chaque valeur de $n$,

$$\omega_n = \omega'_{-n} , \quad \xi_n = - 2\omega'_{-n} - \xi'_n , \quad \eta_n = - 4\mu_1 \omega'_{-n} - \eta'_{-n} , \quad \zeta_n = 4\mu_1 \omega'_{-n} + 2\eta'_{-n} + \zeta'_{-n} .$$

En se servant de ces valeurs de la manière déjà expliquée on obtiendra une nouvelle série d'expressions de $A_{-n}^{(i)}$, $B_{-n}^{(i)}$ . . . . en fonctions linéaires de $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ . . . . .

Enfin de l'identité de ces trois systèmes de valeurs on obtiendra une foule d'autres relations entre les coefficients $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ . . . . eux-mêmes. Ces relations pourraient être utiles dans quelques questions, mais comme je ne m'en suis pas servi je les supprime.

# SUR LA SURFACE

## QUI EST L'ENVELOPPE DES PLANS CONDUITS PAR LES POINTS D'UN ELLIPSOÏDE PERPENDICULAIREMENT AUX RAYONS MENÉS PAR LE CENTRE.

**PAR M. A. CAYLEY.**

(traduction par l'auteur d'une mémoire présenté à la Société Royale de Londres le 22 Fevrier 1858.)

La considération de la surface dont il s'agit me fut suggérée , il y a quelques années par le Prof[r]. Stokes, mais il convient de remarquer que la courbe enveloppe des droites menées par les points d'une ellipse perpendiculaires aux rayons conduits par le centre, est mentionnée en passant dans le mémoire de M. Tortolini *Sulle relazioni* ec. *Tortolini, Annali,* Tom. VI. pp. 433-446, 1855 (voir p. 461), où il trouve que l'équation de la courbe est

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3$$
$$=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2,$$

équation qui était trouvée en égalant à zéro le discriminant d'une fonction quadratique. L'auteur remarque que cette équation fut trouvée par lui en 1846 dans la *Raccolta Scientifica di Roma,* et il remarque que la courbe est connue sous le nom de la courbe de *Talbot.*

Selon ma méthode l'équation de la courbe est trouvée en égalant a zéro le discriminant d'une fonction cubique, et l'équation de la surface est trouvée en égalant à zéro le discriminant d'une fonction quadratique. Et comme on a besoin de la courbe pour la discussion de la surface, je commence par la considération de la courbe.

On voit sans peine qu'en s'imaginant un cercle passant par le centre de l'ellipse et touchant l'ellipse à l'un quelconque de ses points, le point correspondant de la courbe est situé à l'extremité du diamètre du cercle, lequel diamètre passe par le centre de l'ellipse, ou ce qui est la même chose (prenant pour origine le centre de l'ellipse) les coordonnées du point de la courbe sont respectivement les doubles des coordonnées du centre du cercle. Prenez X, Y pour les cordonnées du point de l'ellipse, et $x$, $y$ pour ceux du point de la courbe, l'équation de l'ellipse sera

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

et de la construction géométrique dont je viens de parler on obtient sans peine

$$x = X\left(2 - \frac{1}{a^2}(X^2 + Y^2)\right), \qquad y = Y\left(2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + Y^2)\right)$$

les quelles sont les expression de $x$, $y$ en X, Y.

Ces expressions font voir que les points selon lesquels l'ellipse est coupée par le cercle $X^2 + Y^2 = 2a^2$ (c'est-à-dire les points

$$(b^2 - a^2)X^2 = a^2(b^2 - 2a^2), \qquad (b^2 - a^2)Y^2 = a^2b^2,$$

qui sont des points imaginaires de l'ellipse) donnent pour la courbe des points doubles sur l'axe des Y (ces points sont toujours imaginaires) et de même les points selon lesquels l'ellipse est coupée par le cercle $X^2 + Y^2 = 2b^2$ (c'est-à-dire les points

$$(a^2 - b^2)X^2 = a^2b^2, \qquad (a^2 - b^2)Y^2 = b^2(a^2 - 2b^2),$$

qui sont des points réels de l'ellipse en supposant $a^2 > 2b^2$) donnent pour la courbe des points doubles sur l'axe des X. Les coordonnées de ces points doubles sont données par $a^2x^2 = 4b^2(a^2 - b^2)$, $y^2 = 0$, et elles sont ainsi réelles, soit pour $a^2 < 2b^2$, soit par $a^2 > 2b^2$, mais dans le primier cas, les points doubles sont des points conjugués.

En formant les équations

$$dx = \left(2 - \frac{1}{a^2}(3X^2 + Y^2)\right)dX - \frac{2XY}{a^2}dY = 0,$$

$$dy = -\frac{2XY}{b^2}dX + \left(2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + 3Y^2)\right)dY = 0$$

et en éliminant dX, dY, ce qui donne l'équation

$$\left(2 - \frac{1}{a^2}(3X^2 + Y^2)\right)\left(2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + 3Y^2)\right) - \frac{4X^2Y^2}{a^2b^2} = 0$$

laquelle au moyen de l'équation de l'ellipse se réduit à

$$-2(X^2 + Y^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 3(X^2 + Y^2)^2\frac{1}{a^2b^2} = 0.$$

On voit que les points de l'ellipse lesquels donnent lieu à des points de rebroussement de la courbe doivent être situés sur la courbe donnée par l'équation dernièrement mentionnée. Cette équation se divise en deux facteurs; l'équation $X^2 + Y^2 = 0$ combinée avec l'équation de l'ellipse donne les points $X^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}$, $Y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}$, lesquels sont des points imaginaires de l'ellipse. — Mais on peut se convaincre sans peine que ces points *ne donnent pas lieu* à des points de rebroussement de la courbe.

L'autre facteur savoir $X^2+Y^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2)$, combiné avec l'équation de l'ellipse donne les points

$$(a^2-b^2)X^2=\frac{1}{3}a^2(2a^2-b^2)\,, \quad (a^2-b^2)Y^2=\frac{1}{3}b^2(a^2-2b^2)\,,$$

lesquels pour $a^2>2b^2$ sont des points réels de l'ellipse, et qui donnent lieu à des points de rebroussement de la courbe. On trouve alors pour les coordonnées des points de rebroussement

$$(a^2-b^2)a^2x^2=\frac{4}{27}(2a^2-b^2)^3\,, \qquad (b^2-a^2)b^2y^2=\frac{4}{27}(2b^2-a^2)^3$$

lesquels sont aussi des points réels par $a^2>2b^2$.

On trouve sans peine les points dans lesquels la courbe coupe l'ellipse; en effet ces points se dérivent des points où l'ellipse est coupée par le cercle

$$X^2+Y^2=\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\,,$$

lesquels sont des points réels de l'ellipse si $a^2>2b^2$, et les coordonnées sont données par

$$(a^4-b^4)X^2=a^2b^2(2a^2-b^2)\,, \qquad (b^4-a^4)Y^2=a^2b^2(2b^2-a^2)$$

delà on obtient pour les coordonnées des points où l'ellipse est coupée par la courbe

$$(a^2+b^2)^3(a^2-b^2)x^2=a^2b^2(2a^2-b^2)^3\,, \quad (a^2+b^2)^3(b^2-a^2)y^2=a^2b^2(2b^2-a^2)^3$$

lesquels sont de même des points réels si $a^2>2b^2$. A présent il est facile d'apercevoir la forme de la courbe; en effet on voit d'abord que la courbe est symétrique par rapport à chacune des deux axes et qu'elle touche l'ellipse aux extremitées des deux axes : pendant que $a^2<2b^2$ ( c'est-à-dire pendant que l'ellipse n'est pas trop excentrique) la courbe est une ovale située entièrement en dedans de l'ellipse. Seulement il y a deux points conjugués sur l'axe de $x$. En supposant $a^2=2b^2$ on n'a plus les deux points conjugués, mais l'apparence de la courbe n'est pas autrement changée; cependant les points aux extremités de l'axe majeur de l'ellipse sont ici des points singuliers d'une espèce particulière. Car chacun de ces points est formé par l'union, et l'amalgamation de deux points de rebroussement et d'un point double. Mais pour $a^2>2b^2$ la forme de la courbe est entièrement changée : aux extrémités de l'axe majeur, la courbe est située en dehors de l'ellipse, avec sa convexité dans le sens opposé a celle de l'ellipse; la courbe va de chaque côté jusqu'à un point de rebroussement où elle change le direction, et puis elle coupe l'ellipse, coupe aussi l'axe majeur dans un point au dedans de l'ellipse ( ce point est l'intersection de

deux branches de la courbe, et ainsi un point double), et enfin la courbe arrive à l'extrémité de l'axe mineur où elle se réunit avec la branche située de l'autre côté de l'axe mineur; la construction geometrique par points donné le moyen de tracer la courbe avec exactitude; et dans le cas $a^2 > 2b^2$ on pourrait aussi par les valeurs ci-devant données pour les coordonnées construire les points doubles, et les points de rebroussement. Pour trouver l'équation de la courbe il faut éliminer X, Y entre l'équation de l'ellipse, et les équations trouvées pour $x$, $y$; pour faire cela j'écris $X^2 + Y^2 = \theta$, on a alors

$$x = X\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right), \qquad y = Y\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right),$$

et l'équation $X^2 + Y^2 = \theta$, et l'équation de l'ellipse donne alors

$$\theta = \frac{x^2}{\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right)^2}, \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right)^2}$$

entre lesquelles il faut éliminer $\theta$; en multipliant la première équation par 2, et la seconde équation par $-\theta$ et en ajoutant, on trouve

$$\theta = \frac{x^2}{2 - \frac{\theta^2}{a^2}} + \frac{y^2}{2 - \frac{\theta}{b^2}}$$

et la seconde équation est l'équation dérivée de celle-ci par rapport à $\theta$; c'est-à-dire l'équation de la courbe sera trouvée en éliminant $\theta$ entre cette équation et sa derivée par rapport à $\theta$: en ecartant les dénominateurs, l'équation devient

$$\theta^3 - \theta^2(2a^2 + 2b^2) + \theta(a^2x^2 + b^2y^2 + 4a^2b^2) - 2a^2b^2(x^2 + y^2) = 0$$

et le discriminant de cette fonction cubique de $\theta$, égalé à zéro donne l'équation de la courbe.

Je represente la fonction cubique par

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})(\theta, 1)^3$$

de manière que

$$\mathrm{A} = 1$$

$$\mathrm{B} = -\tfrac{2}{3}(a^2 + b^2)$$

$$\mathrm{C} = \tfrac{1}{3}(a^2x^2 + b^2y^2 + 4a^2b^2)$$

$$\mathrm{D} = -2a^2b^2(x^2 + y^2).$$

En representant le discriminant par $\square$, dans le cas actuel où $\mathrm{A} = 1$, il sera convenable de se servir de la forme

*

$$A^2\square = 4(AC - B^2)^3 - (3ABC - A^2D - 2B^3)^2 = 0.$$

On a

$$AC - B^2 = \frac{1}{9}(3a^2x^2 + 3b^2y^2 - 4a^4 + 4a^2b^2 - 4b^4)$$

$$AD - BC = \frac{2}{9}\left[ (a^2 - 8b^2)\, a^2x^2 + (b^2 - 8a^2)\, b^2y^2 + 4(a^2 + b^2)a^2b^2 \right]$$

$$BD - C^2 = -\frac{1}{9}\left[a^4x^4 + 2a^2b^2x^2y^2 + b^2y^4 - 4(a^2 + 3b^2)a^2b^2x^2 - 4(b^2 + 3a^2)a^2b^2y^2 \right.$$
$$\left. + 16a^4b^4\right],$$

et de la

$$3ABC - A^2D - 2B^3 = 2B(AC - B^2) - A(AD - BC)$$

$$= -\frac{2}{27}\left[9(a^2 - 2b^2)a^2x^2 + 9(b^2 - 2a^2)b^2y^2 - 8a^6 + 12a^4b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6\right],$$

et l'équation de la courbe est ainsi trouvée sous la forme

$$(3a^2x^2 + 3b^2y^2 - 4a^4 + 4a^2b^2 - 4b^4)^3$$
$$+ \left[9(a^2 - 2b^2)a^2x^2 + 9(b^2 - 2a^2)b^2y^2 - 8a^6 + 12a^4b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6\right]^2 = 0$$

laquelle est en effet la forme ci-devant mentionnée : j'ajoute que l'on trouverait les expressions dejà données pour les coordonnées des points de rebroussement en égalant à zéro les deux fonctions quadratiques qui entrent dans l'équation.

Je considère à present la surface qui est l'enveloppe des plans menés par les points d'une ellipsoïde perpendiculaires aux rayons conduits par le centre. En s'imaginant une sphère qui passe par le centre de l'ellipsoïde et touche l'ellipsoïde dans l'un quelconque de ses points, le point correspondant de la surface sera à l'extrémité d'un diamètre de la sphère, lequel diamètre passe par le centre de l'ellipsoïde : ou ce qui est la même chose (prenant le centre de l'ellipsoïde pour origine) les coordonnées du point de la surface sont respectivement les doubles des coordonnées du centre de la sphère. Prenez X, Y, Z pour les coordonnées du point de l'ellipsoïde, et $x$, $y$, $z$ pour les coordonnées du point de la surface, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

et la construction qui vient d'être mentionnée donne

$$x = X\left[2 - \frac{1}{a^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right], \quad y = Y\left[2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right],$$
$$z = Z\left[2 - \frac{1}{c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right]$$

pour les expressions de $x$, $y$, $z$ en fonction de X, Y, Z.

La discussion de la surface peut être effectuée au moyen de ces expressions. Il y a un assez grand nombre de différentes formes de la surface; mais le seul cas que je vais considérer (lequel apparemment est celui qui présente le plus grand nombre des singularités réelles) est le cas où $a^2 > 2b^2$, $b^2 > 2c^2$; en effet dans ce cas, les courbes du sixième ordre, ou sextiques, correspondantes aux sections principales de l'ellipsoïde ont chacune des points doubles et des points de rebroussement.

Les courbes selon lesquelles l'ellipsoïde est coupée par les sphéres concentriques

$$X^2+Y^2+Z^2=2a^2\,,\qquad X^2+Y^2+Z^2=2b^2\,,\qquad X^2+Y^2+Z^2=c^2$$

donnent lieu dans la surface à des courbes *Nodales* (courbes doubles) dans les plans $yz$, $zx$, $xy$ respectivement. La première des ces courbes d'intersection, et la courbe nodale dans le plan de $zy$ qui y correspond sont l'une et l'autre imaginaires : les deux autres courbes d'intersection et les courbes nodales dans les plans de $zx$ et $xy$ qui y correspondent sont réelles; la courbe selon laquelle l'ellipsoïde est coupée par la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=2b^2;$$

laquelle courbe est une espèce d'ovale autour de l'extrémité de l'axe le plus grand de l'ellipsoïde (il va sans dire que les ovales dont je parle sont des courbes à double courbure) cette courbe d'intersection, je dis, donne lieu à une courbe nodale hyperbolique sur le plan de ZX. Pour en trouver l'équation on a

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1\,,\qquad X^2+Y^2+Z^2=2b^2,\qquad x=2X\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right),$$
$$y=0\,,\qquad z=2Z\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)$$

et de là en éliminant X, Y, Z où trouve

$$\frac{a^2x^2}{4b^2(a^2-b^2)}-\frac{c^2z^2}{4b^2(b^2-c^2)}=1\,,$$

pour l'équation de la courbe nodale hyperbolique dans le plan de $zx$; on s'assure sans peine que cette courbe passe par les points doubles de la courbe sextique dans le plan de $xy$.

De même la courbe selon laquelle l'ellipsoïde est coupée par la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=2c^2;$$

laquelle courbe est une espèce d'ovale autour de l'extremité de l'axe le plus petit, donne lieu à une courbe nodale elliptique dans le plan de $xy$, et on a d'une manière semblable

$$\frac{a^2x^2}{4c^2(a^2-c^2)}+\frac{b^2y^2}{4c^2(b^2-c^2)}=1$$

pour l'équation de cette courbe nodale elliptique dans le plan de $xy$: cette courbe passe par les points doubles des courbes sextiques dans les plans de $yz$ et $zy$ respectivement. La section de la surface par un plan principal de l'ellipsoïde est composée de la courbe sextique donnée par la section principale de l'ellipsoïde et de la courbe nodale (ellipse hyperbole, ou conique imaginaire) considérée comme deux coniques coïncidentes; les sections principales de la surface sont ainsi des courbes de l'orde 10 et (ce qui sera montré plus complètement dans la suite) la surface elle même est de l'ordre 10.

A present je vais chercher la courbe sur l'ellipsoïde laquelle donne lieu à une courbe *cuspidale* (courbe de rebroussement) sur la surface. Pour cela je forme les équations :

$$\begin{aligned}
dx &= \left[2 - \frac{1}{a^2}(3X^2 + Y^2 + Z^2)\right]dX - \frac{2XY}{a^2}dY - \frac{2XZ}{a^2}dZ = 0\\
dy &= -\frac{2YX}{b^2}dX + \left[2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + 3Y^2 + Z^2)\right]dY - \frac{2YZ}{b^2}dZ = 0\\
dz &= -\frac{2ZX}{c^2}dX - \frac{2ZY}{c^2}dY + \left[2 - \frac{1}{c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right]dZ = 0
\end{aligned}$$

et en eliminant dX, dY, dZ et réduisant au moyen de l'équation de l'ellipsoïde on trouve

$$4\left(\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4}\right) - 2(X^2 + Y^2 + Z^2)\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$

$$+ 3(X^2 + Y^2 + Z^2)^2\frac{1}{a^2b^2c^2} = 0,$$

laquelle est l'équation d'une surface du quatrième ordre qui coupe l'ellipsoïde suivant une courbe qui donne lieu à une courbe cuspidale sur la surface. La courbe sur l'ellipsoïde rencontre chacune des sections principales dans les points qui donnent lieu à la courbe sextique qui correspondt à la section principale, et dans les points selon lesquels la section principale est coupée par la courbe qui donne lieu à une courbe nodale : ainsi les points d'intersection de la surface du quatrième ordre avec la section principale $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$, $Y = 0$ sont les points d'intersection de cette ellipse avec les courbes

$$X^2 + Z^2 = \frac{2}{3}(a^2 + c^2) \qquad \text{et} \qquad X^2 + Z^2 = 2b^2$$

lesquels points sont réels; les points d'intersection avec la section principale

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1\ ,\ X=0$$

sont les points d'intersection de cette ellipse avec le cercle

$$Y^2+Z^2=\frac{2}{3}(b^2+c^2)$$

lesquels points sont réels, et avec le cercle

$$Y^2+Z^2=2a^2,$$

lesquels points sont imaginaires; les points d'intersection avec la section principale

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ ,\ Z=0$$

sont les points d'intersection de cette ellipse avec le cercle

$$X^2+Y^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2),$$

lesquels points sont réels, et avec le cercle

$$X^2+Y^2=2c^2$$

lesquels points sont imaginaires. La courbe sur l'ellipsoïde qui donne lieu à la courbe cuspidale rencontre les courbes sur l'ellipsoïde qui donnent lieu aux courbes nodales, seulement dans les points ou ces dernières courbes sont rencontrées par les sections principales respectivement; et les points ou cela arrive sont des points de contact des courbes dont il s'agit; les seuls points réels de contact sont les points où la section principale

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1\ ,\ Y=0$$

est coupée par le cercle $X^2+Z^2=2b^2$. Pour fixer les idées je suppose $a^2+b^2>3b^2$, on a alors $2b^2<\frac{2}{3}(a^2+b^2)$ et les points dont je viens de parler sont situés plus près des extrémités de l'axe le plus petit que ne sont les points ou cette même ellipse est coupée par le cercle

$$X^2+Z^2=\frac{2}{3}(a^2+c^2).$$

La courbe sur l'ellipsoïde que donne lieu à la courbe cuspidale est composée de deux paires d'ovales : les ovales de l'une de ces paires sont situées, autour des extremités de l'axe le plus petit, et les ovales de l'autre paire autour des extremités de l'axe le plus grand ; et par la remarque dejà faite, les ovals de la première paire tou-

chent la courbe sur l'elllpsoïde qui donnent lieu à la courbe hyperbolique nodale, les coordonnées des points de contact étant donnés par

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \ , \ X^2 + Y^2 = 2b^2 \ , \ Y = 0 \ ,$$

les coordonnées des points correspondants sur la surface sont donnés par

$$x^2 = \frac{4(a^2 - b^2)(2b^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} \ , \qquad y^2 = \frac{4(b^2 - c^2)(a^2 - 2b^2)}{c^2(a^2 - c^2)} \ .$$

Nous avons jusqu'ici parlé de la courbe nodale hyperbolique comme étant une hyperbole complète, mais il convient de remarquer que la courbe réelle entière sur l'ellipsoïde ne donne lieu qu'à des parties finies de cette hyperbole, savoir les parties finies comprises entre les points dont je viens de donner les coordonnées, et pour ces parties de l'hyperbole la courbe nodale est une courbe nodale proprement dite, savoir il y a pour la courbe deux nappes réelles, mais pour les autres points de l'hyperbole il n'y a aucune nappe réelle de la surface, ou autrement dit, la courbe nodale est une courbe conjuguée: les points dont il s'agit (lesquels pour plus de commodité je vais appeller les *points critiques* *) seront évidemment des points cuspidals sur la courbe nodale (c'est-à-dire des points ou les deux plans tangents deviennent identiques). Mais ces points sont ici des points d'une singularité plus élevée, savoir ils sont des points de rebroussement sur la courbe cuspidale, et de plus la courbe nodale hyperbolique, la courbe cuspidale, et la courbe sextique dans le plan $zx$ ont à chacun de ces points une tangente commune. Car comme je l'ai auparavant mentionné, les courbes sur l'ellipsoïde qui donnent lieu à la courbe nodale hyperbolique et la courbe cuspidale respectivement, se touchent l'une l'autre aux points qui donnent lieu aux points critiques; de là il suit que la courbe nodale hyperbolique, et la courbe cuspidale se touchent l'une l'autre aux points critiques, et par cela seulement que la tangente de la courbe cuspidale est, à l'un quelconque des points critiques, dans le plan de $zx$, ( puisque la courbe cuspidale est symétrique par rapport à ce plan) on voit que le point critique sera un point de rebroussement sur la courbe cuspidale. Il ne reste qu'à montrer que la courbe nodale hyperbolique, et la courbe sextique ont une tangente commune au point critique. La tangente de la courbe nodale hyperbolique est donnée par l'équation

$$\frac{a^2 x \, dx}{a^2 - b^2} - \frac{c^2 z \, dz}{b^2 - c^2} = 0$$

ou

*) Dans le mémoire anglais j'ai dit « points of cesser » ce qui était un terme plus expressif A. C.

$$x = X\left[2 - \frac{1}{a^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right],\quad z = Z\left[2 - \frac{1}{c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right],$$

$$\text{et}\quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,\quad X^2 + Z^2 = 2b^2,\quad Y = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$x = \frac{2X}{a^2}(a^2 - b^2),\qquad z = -\frac{2Z}{c^2}(b^2 - c^2)$$

et l'équation devient ainsi $Xdx + Zdz = 0$, ce qui fait voir que la tangente est perpendiculaire au rayon mené par le centre de l'ellipsoïde au point qui donne lieu au point critique, c'est-à-dire que la tangente de la courbe nodale hyperbolique coïncide avec celle de la courbe sextique dans le plan de $zx$. Et l'on peut à présent expliquer plus particulièrement la forme de la courbe cuspidale (le cas dont il s'agit est celui où l'on a non seulement $a^2 > 2b^2$, $b^2 > 2c^2$ mais aussi $a^2 + c^2 > 3b^2$) en effet la courbe cuspidale est composée en premier lieu de deux ovales on forme d'œil ($<>$) situés symétriquement de chaque côté du plan de $xy$, et qui passent par les points critiques, et les points de rebroussement de la courbe sextique dans le plan de $yz$, et en second lieu de deux ovales ordinaires situés symétriquement de chaque côté du plan de $yz$, et qui passent par les points de rebroussement des courbes sextiques dans les plans de $xy$ et $zx$ respectivement : touts les ovales dont il s'agit étant, il va sans dire, des courbes à double courbure. Les relations des différentes courbes sur l'ellipsoïde seront mieux comprises au moyen de la figure 1ª, où les sections principales de l'ellipsoïde sont tracées non pas en perspective, mais développées sur le plan de la figure, et les courbes qui donnent lieu aux courbes nodales et cuspidales respectivement sont seulement marquées par des courbes menées par les points dans les sections principales par lesquels points passent respectivement les courbes dont il s'agit. On aura une idée de la forme de la surface au moyen de la figure 2ª (laquelle est dessinée en perspective orthogonale au moyen de la première figure) et qui fait voir la forme des sections principales de la surface (y compris les courbes nodales) et la forme de la courbe cuspidale. Les numeros et lettres dans les deux figures font voir quels points des différentes courbes sur l'ellipsoïde donnent lieu respectivement aux points des différentes courbes sur la surface. En particulier il convient de remarquer que dans la figure 1ª. le point 4 qui donne lieu à un point critique est situé entre les points 3 et 5 qui donnent lieu respectivement au point double et au point de rebroussement de la courbe sextique dans le plan de $zx$, et cela fait voir très évidemment dans quelle partie de la courbe sextique est située le point critique, où cette courbe est touchée par la courbe nodale hyperbolique. Je

n'ai pas cherché à dessiner d'autres sections de la surface, cela donnerait trop de complication à la figure, et il serait encore plus difficile d'apercevoir la forme de la surface, laquelle peut à peine être représentée si non par une modèle, ou au moins une stéréographie. On peut trouver l'équation de la surface de la même manière que celle de la courbe sextique, à savoir il faut eliminer X, Y, Z entre l'équation

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,$$

et les équations

$$x=X\left[2-\frac{1}{a^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],$$

$$y=Y\left[2-\frac{1}{b^2}(X^2+Y^0+Z^2)\right],$$

$$z=Z\left[2-\frac{1}{c^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],$$

qui donnent les points de la surface.

En écrivant $\theta=X^2+Y^2+Z^2$ on trouve

$$\theta=\frac{x^2}{\left(2-\frac{\theta}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(2-\frac{\theta}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(2-\frac{\theta}{c^2}\right)^2}$$

$$1=\frac{x^2}{a^2\left(2-\frac{\theta}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(2-\frac{\theta}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(2-\frac{\theta}{c^2}\right)^2}.$$

et en multipliant la seconde équation par 2, et la première équation par $-\theta$ et en ajoutant on trouve

$$\theta=\frac{x^2}{2-\frac{\theta}{a^2}}+\frac{y^2}{2-\frac{\theta}{b^2}}+\frac{z^2}{2-\frac{\theta}{c^2}}$$

laquelle a pour dérivée par rapport à $\theta$, la seconde équation. Cette équation peut s'écrire

$$\theta^4-2(a^2+b^2+c^2)\theta^3+\left[4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right]\theta^2$$
$$+\left[-8a^2b^2c^2-2(b^2+c^2)a^2x^2-2(c^2+a^2)b^2y^2-2(a^2+b^2)c^2z^2\right]\theta$$
$$+4a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)=0$$

et l'équation de la surface sera trouvée en égalant à zéro le discriminant de cette fonction de $\theta$. En représentant l'équation par

$$\frac{1}{6}(\mathrm{A, B, C, D, E})(\theta, 1)^4 = 0$$

on aura

$$\mathrm{A} = 6$$

$$\mathrm{B} = -3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\mathrm{C} = 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$\mathrm{D} = -12a^2b^2c^2 - 3(b^2 + c^2)a^2x^2 - 3(c^2 + a^2)b^2y^2 - 3(a^2 + b^2)c^2z^2$$

$$\mathrm{E} = 24a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

et l'équation de la surface sera

$$(\mathrm{AE} - 4\mathrm{BD} + 3\mathrm{C}^2)^3 - 27(\mathrm{ACE} + 2\mathrm{BCD} - \mathrm{AD}^2 - \mathrm{B}^2\mathrm{E} - \mathrm{C}^3)^2 = 0.$$

Il convient de remarquer que $\mathrm{C}^6$, qui serait du douzième ordre en $x$, $y$, $z$ n'entre pas dans l'équation, et que tous les autres termes sont au plus de l'ordre 10, la surface est donc (comme j'ai dejà remarqué) de l'ordre 10. Il ne m'a pas paru nécessaire de dévélopper plus complètement l'équation. (*)

(*) Mi sia lecito di richiamare qui per un'istante in seguito alla bella, ed elegante Memoria dell'illustre Geometra, come più volte questa superficie di decimo ordine derivata dall'ellissoide sia stato fin da molti anni per me il soggetto di ricerche relativo al calcolo integrale per ciò che riguarda specialmente la sua quadratura dipendente da trascendenti ellittici di prima, e seconda specie; così in un breve articolo inserito nella *Raccolta Scientifica* di Roma Anno 2.º N.º 9 in data del 2 Aprile 1846 ritrovai le coordinate della nuova superficie in funzione delle coordinate corrispondenti dell'ellissoide, e determinai ancora l'integrale definito duplicato di forma razionale per la quadratura della stessa superficie : più estesamente mi occupai dello stesso argomento in una Memoria inserita nel tom. 34.º del Sig. *Crelle* in data 15 Aprile 1846: più completamente poi risolvei la stessa questione in altro articolo pubblicato nella citata *Raccolta Scientifica* dello stesso Anno 2.º N.º 21 con la data del 23 Ottobre 1846. Infine ripresi a risolvere lo stesso problema con altri metodi in una Memoria *Sulla riduzione di alcuni integrali definiti ai trascendenti ellittici* inserita pel mese di Agosto e Settembre 1848 nel giornale arcadico di Roma, e precisamente nel N.º 18 e seguenti. Sovente ancora nei privati miei studii tentai di giungere all'equazione algebrica della superficie, il che dipendeva da un'eliminazione, ma proponendomi la questione sotto un'aspetto complicato, mi trovava arrestato dalla lunghezza dei Calcoli. Il maraviglioso ripiego analitico ritrovato dal Sig. Cayley riduce quest'eliminazione ad una simplicità inaspettata, e rende inutile qualunque altra ricerca, che si volesse intraprendere sullo stesso soggetto. Termino questa breve nota col fare i miei distinti ringraziamenti al chiarissimo Autore, che si è compiaciuto dietro un mio suggerimento comunicatogli dal Sig. D. *Hirst* fare la traduzione della Memoria per essere inserita negli *Annali*.

*B. T.*

# MÉMOIRE

## SUR LA FIGURE DE LA TERRE CONSIDÉRÉE COMME PEU DIFFERENTE D'UNE SPHÈRE

PAR M. OSSIAN BONNET

répétiteur à l'École Polytechnique de Paris.

(Continuazione e fine. V. pag. 130.)



19. Si nous ajoutons les courbures $\frac{1}{\rho_0}, \frac{1}{\rho_{\frac{\pi}{2}}}$ des deux sections normales menées l'une tangentiellement, l'autre normalement à la courbe $\varphi =$ const., nous aurons la valeur constante de la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre. Dans le cas actuel où il s'agit d'une surface peu différente d'une sphère, je dis que la moitié de cette somme n'est autre chose que ce que M[r]. Gauss a appelé la courbure de la surface, c'est-à-dire la moyenne géométrique des deux courbures principales. En effet si on appelle $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ les deux courbures, il est clair que la différence

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}-2\sqrt{\frac{1}{RR'}}=\left(\sqrt{\frac{1}{R}}-\sqrt{\frac{1}{R'}}\right)^2=\frac{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{R}}+\sqrt{\frac{1}{R'}}\right)^2}$$

est une quantité de l'ordre $\alpha^2$ et par consequent négligeable. Ainsi K étant la courbure de la surface, on a

$$K=1-\alpha u_0+\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\lambda_0\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0-\frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0.$$

On peut établir ce dernier résultat directement. En effet d'après une formule de M[r]. Gauss, si l'on appelle

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2$$

le carré de l'élement d'une surface en fonction de deux variables independantes $u$ et $v$ on trouve pour le carré de la courbure

$$\frac{1}{RR'}=\frac{1}{4E^2G^2}\left\{E\frac{dE}{dv}\frac{dG}{dv}+E\left(\frac{dG}{du}\right)^2+G\frac{dE}{du}\frac{dG}{du}+G\left(\frac{dE}{dv}\right)^2-2EG\left(\frac{d^2E}{dv^2}+\frac{d^2G}{du^2}\right)\right\}$$

dans le cas d'une surface peu différente d'une sphère on a en fesant $u=\theta$, $v=\varphi$

$$E=1+2\alpha u\,,\qquad G=(1+2\alpha u)\sin^2\theta$$

donc, en substituant, on trouve

$$\frac{1}{RR'}=1-\alpha\left(2u_0+\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0+\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)_0}{\sin\theta_0}\right).$$

Cette formule revient évidemment en négligeant le carré de $\alpha$ à celle qui a été trouvée plus haut.

Si l'on multiplie $\frac{1}{RR'}$ par la valeur $(1+2\alpha u_0)\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_0$ de l'élement $d\sigma_0$ de la surface, il vient pour la valeur sphérique de cet élément

$$d\sigma'_0=\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_0\left(1-\alpha\left[\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0+\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)_0}{\sin^2\theta_0}\right]\right)$$

ou bien en posant $\cos\theta=\mu$,

$$d\sigma'_0=-d\mu_0\,d\varphi_0\left(\frac{d.(1-\mu_0^2)\left(\frac{du}{d\mu}\right)_0}{d\mu_0}+\frac{\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)_0}{1-\mu_0^2}\right)$$

et en intégrant les deux membres, de manière à avoir la valeur sphérique de toute la surface donnée, on a

$$\iint d\sigma'_0=4\pi.$$

On vérifie ainsi pour le cas d'une surface peu différente de la sphère le théorème général qui a été démontré pour la première fois par Olindes Rodrigues et d'après lequel la somme des valeurs sphériques des différents éléments superficiels d'une surface fermée quelconque, est égale à la surface de la sphère qui a 1 pour rayon.

20. Nous terminerons par la détermination des éléments de la Loxodromie, en supposant toujours à la terre la forme d'une surface peu différente d'une sphère. On entend comme on sait par Loxodromie une courbe qui coupe sous un angle constant les différents méridiens de la surface. Cela étant si on appelle K l'angle constant que fait la loxodromie avec les méridiens et $i$ l'angle variable qu'elle fait avec les courbes $\varphi=$ const. nous aurons

$$(59)\qquad i=K+\alpha\left(\frac{d^2u}{d\theta\,d\varphi}\,\frac{1}{\sin\theta}-r\frac{du}{d\varphi}\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

et en même temps

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin\theta\, d\varphi}{d\theta}.$$

Posons

$$(60)\qquad d\theta = \cos i\, dt,$$

d'où

$$(61)\qquad d\varphi = \frac{\sin i}{\sin\theta}\, dt.$$

Il s'agira de déterminer les valeurs de $i$, $\theta$, $\varphi$ qui vérifient les équations (59), (60), (61), et qui pour $t=0$ si réduisent respectivement à

$$K + \alpha\left[\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 \frac{1}{\sin\theta_0} - 2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\right],\ \theta_0 \text{ en } \varphi_0.$$

Nous supposerons comme dans la question des lignes géodésiques $t$ assez petit pour que les termes en $\alpha t^2$ et $t^4$ soient négligéables, auquel cas, comme nous l'avons vu plus haut, la variable $t$ est liée à l'arc $s$ de la courbe par la relation simple

$$t = s(1-\alpha u).$$

Remplaçant dans les équations (60) et (61), $i$ par sa valeur déduite de l'équation (59), il vient en négligeant $\alpha^2$,

$$(62)\qquad d\theta = \cos K\, dt - \alpha \sin K\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\,\frac{1}{\sin\theta} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right)dt,$$

$$(63)\qquad d\varphi = \frac{\sin K}{\sin\theta}\, dt + \frac{\alpha\cos K}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right)dt.$$

Intégrant la première de ces équations, on a

$$\theta - \theta_0 = \cos K.t - \alpha\sin K\int_0^t\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{du}{d\varphi}\right]dt$$

ou développant l'integrale suivant les puissances de $t$ et négligeant les termes en $\alpha t^2$

$$(64)\qquad \theta - \theta_0 = \cos K.t - \alpha\sin K\left[\frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 - 2\,\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0\right]t.$$

de là on tire

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta_0} - \frac{\cos\theta_0\cos K}{\sin^2\theta_0}\, t + \frac{(1+\cos^2\theta_0)\cos^2 K}{\sin^3\theta_0}\,\frac{t^2}{2}$$

en négligeant les termes en $\alpha t$ et en $t^3$. Portant dans l'équation (63), il vient

$$d\varphi = \sin K \left\{ \frac{1}{\sin\theta_0} - \frac{\cos\theta_0 \cos K}{\sin^2\theta_0} t + \frac{(1+\cos^2\theta_0)\cos^2 K}{\sin^3\theta_0} \frac{t^2}{2} \right\} dt$$

$$+ \frac{\alpha \cos K}{\sin\theta_0} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} - 2 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{du}{d\varphi} \right) dt$$

avec la même approximation. Intégrant on trouve

$$(65) \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{\sin K}{\sin\theta_0} t - \frac{\cos\theta_0 \cos K.\sin K}{\sin^2\theta_0} \frac{t^2}{2} + \frac{(1+\cos^2\theta_0)\cos^2 K.\sin K}{\sin^3\theta_0} \frac{t^3}{6}$$

$$+ \frac{\cos K}{\sin\theta_0} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 - 2 \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 \right] t$$

où l'on ne néglige que les termes de l'ordre de $\alpha t^2$.

Les formules (64), (65) et la formule (59) qui, dans le cas où l'on néglige les termes en $\alpha t^2$, peut encore se mettre sous la forme

$$i = K + \alpha \left\{ \frac{1}{\sin\theta_0} \left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 - 2 \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 \right\}$$

$$+ \alpha t \left\{ \left[ 2 \frac{1+\cos^2\theta_0}{\sin^3\theta_0} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 - 3 \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} \left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 + \frac{1}{\sin\theta_0} \frac{d^2u}{d\theta^2\, d\varphi} \right] \cos K \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{2\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)_0 - \frac{1}{\sin^2\theta_0} \left(\frac{d^3u}{d\theta\, d\varphi}\right)_0 \right] \sin K \right\} \cdot$$

servent a déterminer les éléments d'une loxodromie quelconque; mais il est important d'introduire dans ces formules à la place de $i$, $\theta$, $\varphi$ l'azimuth $\zeta$, la latitude $\lambda$ et la tangente $l$, et à la place de la variable $t$ l'arc $s$ de la loxodromie, on trouve, aussi sans difficultés, comme ou l'a vu plus haut,

$$(66) \qquad \zeta = K - \alpha \left( \frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0} + \frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0} \left(\frac{du}{dl}\right)_0 \right)$$

$$+ \alpha s \left\{ \left[ 2 \frac{1+\sin^2\lambda_0}{\cos^3\lambda_0} \left(\frac{du}{dl}\right)_0 + 3 \frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0} \left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0 + \frac{1}{\cos\lambda_0} \left(\frac{d^3u}{d\lambda^2 dl}\right)_0 \right] \cos K \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{2\,\text{sen}\,\lambda_0}{\cos^3\lambda_0} \left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0 + \frac{1}{\cos^2\lambda_0} \left(\frac{d^3u}{d\lambda\, dl^2}\right)_0 \right] \sin K \right\},$$

$$(67) \quad \lambda - \lambda_0 = -s \left[ 1 + \alpha u_0 + \alpha \left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0 \right] \cos K - 2\alpha s \left( \frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0} + \frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0} \left(\frac{du}{dl}\right)_0 \right) \sin K$$

$$(68) \qquad l - l_0 = \frac{\sin K.s}{\cos \lambda_0}\left(1 - \alpha u_0 + \alpha \operatorname{tang} \lambda_0 \left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)_0}{\cos^2\lambda_0}\right)$$

$$- \frac{\sin \lambda_0 \cos K}{\cos^2\lambda_0}\frac{s^2}{2} + \frac{(1 + \sin^2\lambda_0)^2 \cos K}{\cos^3\lambda_0}\frac{s^3}{6}.$$

On voit que les différences en latitude et en longitude pour les deux extremités de la loxodromie ne dépendent de la figure de la terre que par les trois fonctions

$$1 - \alpha u_0 - \alpha\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)_0, \quad \frac{\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dl}\right)_0}{\cos\lambda_0} + \frac{\sin\lambda_0}{\cos^2\lambda_0}\left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0$$

$$1 - \alpha u_0 + \alpha \operatorname{tang} \lambda_0 \left(\frac{du}{d\lambda}\right)_0 - \frac{\left(\frac{d^2u}{dl^2}\right)}{\cos^2\lambda_0}$$

que nous avons constamment rencontrées dans les recherches précédentes, et qui suffisent pour définir l'ellipsoide osculateur de la terre en chacun de ses points, et les différences en longitude, en latitude, et en azimuth pour les deux extrémités d'une ligne géodésique. Il en résulte que si l'on était certain que la ligne décrite par un navire fut une véritable loxodromie, et que l'on peut négliger les erreurs commises dans la détermination de l'espace parcouru par le navire, et dans celle de la longitude et de la latitude, on pourrait avoir l'ellipsoide osculateur de la terre, en un point recouvert par la mer; absolument de la même manière que Laplace a détérminé cet ellipsoide pour un point de la partie solide du globe.

21. J'observerai en finissant qu'ayant voulu, dans ce travail considérer la question, principalement au point de vue géométrique, j'ai du me borner à établir les formules sans m'occuper de leurs applications à la détermination de la figure de la terre; du reste on trouvera dans la Mécanique Céleste et dans la Géodésie de M$^r$. Puissant touts les détails désirables sur cette application.

---

## NOUVELLE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DU RESTE DE LA FORMULE DE TAYLOR.

PAR LE Dr. ANT. WINCKLER.



La détermination du reste de la formule de Taylor, qui a occupé d'abord d'Alembert et qui plus tard a été trouvée de différentes manières par Lagrange, Ampère et Cauchy, doit résulter immédiatement du développement de la série, en sorte, qu'on n'y a besoin que de la définition du quotient différentiel; car ce n'est qu'alors qu'on peut mettre en évidence cette formule déja dans les éléments, pour en faire application plus tard à la solution d'un grand nombre de questions, et pour faire voir les grand avantages qu'elle y fournit.

Dans toutes les méthodes connues la détermination du reste est ou trop prolixe, ou on n'en parle que bien tard dans l'exposition du calcul différentiel, — bien souvent en supposant la forme des membres de la série, — ou enfin, on la remet jusqu'au calcul intégral, de manière que les cas, où l'on aurait pu faire les applications les plus importantes de cette formule, sont dejà déterminés tous par des méthodes plus compliquées.

La méthode suivante satisfera peut-être mieux aux conditions susdites, en developpant en même temps la série et son reste d'une manière, qui s'offre, pour ainsi dire de soi même et qui n'exige que la connaissance des trois corollaires suivants:

A. Une fonction croît ou decroît avec sa variable croissante, selon que la valeur de son quotient différentiel est positive ou négative, ou, ce qui revient au même, la différence $\varphi(x+y)-\varphi(x)$ est de même signe que $\varphi'(x)$, — pourvu que $\varphi'(x)$ ne change pas de signe pour des valeurs entre les limites $x$ et $x+y$ de la variable.

B. Le quotient différentiel $f^{(n)}(x)$ ne peut être fini et continu dans l'intervalle de $x$ à $x+y$ de la variable, si ne sont aussi les quotients précédents $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)\ldots f'(x)$, $f(x)$.

C. L'équation $\dfrac{\mathrm{d}f(x+y)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f(x+y)}{\mathrm{d}y}$ a toujours lieu, quand on suppose finie et continue la fonction $f(x+y)$ pour toutes les valeurs de $x$ jusqu'a $x+y$.

### 1.

Le développement désiré de la fonction $f(x+y)$ jusqu'à la puissance $n^{me}$ de

l'acroissement $y$ de la variable soit :

$$f(x+y)=X_0+X_1y+X_2y^2+\ldots+X_{n-2}\,y^{n-2}+X_{n-1}\,y^{n-1}+U,$$

$X_0$, $X_1$, ... $X_{n-1}$ étant des fonctions de la seule variable $x$; et soit U le reste, fonction de $x$ et $y$, que nous allons déterminer.

En différentiant par rapport à $x$, et puis par rapport à $y$, nous aurons l'équation:

$$X'_0+yX'_1+y^2X'_2+\ldots+y^{2-2}\,X'_{n-2}+y^{n-1}\,X_{n-1}+\frac{dU}{dx}$$
$$=X_1+2yX_2+3y^2X_3+\ldots+(n-1)y^{n-2}\,X_{n-1}+\frac{dU}{dy}.$$

On peut satisfaire identiquement à cette équation en faisant:

$$X_1=X'_0\,;\quad 2X_2=X'_1\,;\quad 3X_3=X'_0\,;\ \ldots\ (n-1)X_{n-1}=X'_{n-2} \qquad (1)$$

et

$$y^{n-1}\,X_{n-1}+\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{dy}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) ne renferment que $n$ conditions entre $n+1$ quantités à déterminer. Il faut donc pour les déterminer toutes, ajouter encore la condition, que U s'évanouisse, si l'on pose $y=0$. On obtient donc:

$$X_0=f(x)\,,\quad X_1=f'(x)\,;\quad X_2=\frac{1}{1.2}f''(x)\,;\quad\ldots\quad X_{n-1}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

$$X'_{n-1}=\frac{1}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(n-1)}f^{(n)}(x)$$

et par conséquent l'équation (2) devient :

$$\frac{y^{n-1}}{1.\,2\ldots\,(n-1)}f^{(n)}(x)+\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{dy}$$

ou, si l'on pose, pour abréger

$$U=\frac{y^n}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,n}\,.\,u$$

et remarquant ensuite que

$$\frac{dU}{dx}=\frac{y^n}{1.\,2.\,3\,\ldots\,n}\cdot\frac{du}{dx}\,;\qquad \frac{dU}{dy}=\frac{y^{n-1}}{1.2.\ldots(n-1)}\,u+\frac{y^n}{1.\,2\ldots\,n}\,\frac{du}{dy}$$

nous aurons, comme on voit bien aisément, l'équation

$$u-f^{(n)}(x)+\frac{y}{n}\left(\frac{du}{dy}-\frac{du}{dx}\right)=0.$$

2.

L'integration de cette équation aux differences partielles donnerait immédiatement le reste sous la forme connue d'une integrale definie. Mais on peut trouver la valeur de $u$ d'une manière tout-à-fait différente; en cherchant deux valeurs de $u$, qui produisent dans l'expression

$$F(u) = u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n}\left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx}\right) = 0$$

un changement de signe ; car il existera nécessairement entre ces deux valeurs un autre valeur qui saitsfera à l'équation :

$$F(u) = 0.$$

Substituons donc dans l'équation précédente au lieu de $u$ :

$$u_1 = f^{(n)}(x) \qquad \text{on aura} \qquad F(u_1) = -\frac{y}{n} f^{(n+1)}(x)$$

et de même

$$u_2 = f^{(n)}(x+y) \qquad \text{on aura} \qquad F(u_2) = f^{(n)}(x+y) - f^{(n)}(x).$$

Quant aux signes de ces deux valeurs de $F(u)$ il faut distinguer deux cas :

Les expressions

$$f^{(n+1)}(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(x+y) - f^{(n)}(x)$$

peuvent avoir des signes égaux on opposés.

Dans le cas premier, si les signes sont égaux, les signes de $F(u_1)$ et de $F(u_2)$ sont opposés. Supposons donc que la fonction $f^{(n)}(x)$ soit finie et continue entre les valeurs $x$ et $x+y$ de la variable: il faut nécessairement qu'entre

$$u_1 = f^{(n)}(x) \qquad \text{et} \qquad u_2 = f^{(n)}(x+y)$$

se trouve une valeur de $u$, qui fasse évanouir la fonction $F(u)$. Par conséquent on peut déterminer la valeur d'une quantité $\varkappa$ entre $0$ et $+1$ en sorte que

$$u = f^{(n)}(x+\varkappa y) \qquad \text{et} \qquad F(u) = 0.$$

Si, dans le second cas, les signes des expressions

$$f^{(n+1)}(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(x+y) - f^{(n)}(x)$$

sont opposés, il est clair que $f^{(n+1)}(x)$ entre les deux valeurs $x$ er $x+y$ de la variable changera au moins une fois le signe (v. A.) et par conséquent, qu'elle passera dans cet intervalle, une fois au moins, du croissement au décroissement.

3.

Cela posé, soient $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... les valeurs constantes de $x$, contenues dans les limites $x$ et $x+y$, qui font que

*

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

et ces valeurs soient ordonnées de manière, qu'on ait $x < x_0 < x_1 < \dots < x + y$.

Si l'on substitue

$$u_0 = f^{(n)}(x_0) \ , \qquad \text{on aura} \qquad F(u_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x)$$

puisque $x_0$ est constante et indépendante de $x$ et $y$. Or $x_0$ est la plus petite de toutes les valeurs qui sont au-dessus de $x$, et qui font disparaître $f^{(n+1)}(x)$; il faut donc que les fonctions :

$$f^{(n+1)}(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(x_0) - f^{(n)} = F(u_0)$$

aient les mêmes signes (v. A.) : on conclut de là que :

$$F(u_0) \qquad \text{et} \qquad F(u_2)$$

ont aussi des signes opposés, d'où il suit qu'il y a entre

$$u_0 = f^{(n)}(x_0) \qquad \text{et} \qquad u_2 = f^{(n)}(x + y)$$

une valeur de $u$, et de même entre $x_0$ et $x + y$ une valeur correspondante de $x$, qui fait $F(u) = 0$.

Mais il n'en est pas moins sûr que, si cette valeur de $x$ est entre $x_0$ et $x + y$, elle se trouvera aussi dans l'intervalle amplifié de $x$ jusqu'à $x + y$, et qu'on peut la représenter de même par $x + \varkappa y$, d'où il suit que

$$u = f^{(n)}(x + \varkappa y)$$

comme dans l'art. 2. — On voit de cette discussion, que ces deux cas, séparés au commencement, peuvent être compris dans un même résultat.

Sans supposer finies et continues (v. C.) les fonctions $f(x)$ et $f^{(n)}(x)$ dans l'intervalle de $x$ à $x + y$ de la variable, les conclusions précédentes ne seraient pas valables. Cette supposition n'aurait pas lieu (v. B.) si les fonctions $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, ... $f'(x)$, $f(x)$ ne restaient pas finies et continues dans l'intervalle marqué.

Résumant tont cela, nous aurons ce Théorème :

Si les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, .... $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ sont finies et continues pour toute valeur de la variable entre $x$ et $x + y$, et si l'on désigne par $\varkappa$ une fraction comprise entre les limites 0 et + 1, et déterminée de manière que

$$u = f^{(n)}(x + \varkappa y) \quad \text{satisfasse à l'équation} \quad u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n}\left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx}\right) = 0$$

on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \frac{y^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{y^{n-1}}{1.2..(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{y^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(x + \varkappa y).$$

Q. e. d.

Gratz. 1859.

## SULLE FIGURE INVERSE.

## NOTA

DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.

1.° Avendo preventivamente conosciuto alla sua pubblicazione, la bella, ed elegante Memoria del Sig. D.r *Hirst, Sur la courbure d'une serie de surfaces et de lignes,* inserita in parte nel n.° 2.° di questi *Annali* 1859 pag. 95, ed in parte in questo n.° 3.° pag. 133 mi è dato di aggiungere alcuni sviluppi analitici sopra le *figure inverse,* delle quali l'Autore ne parla nella Nota I.a, e che faciliteranno la risoluzione di alcuni problemi dipendenti in modo speciale dal calcolo integrale.

2.° Siano R, $r$ i due raggi vettori computati da un punto fisso sopra una medesima retta; e pei quali si abbia $\mathrm{R}r = k^2$. Al luogo geometrico dell' estremo di $r$ corrisponderà un'altro luogo geometrico dell'estremità di R : le due figure diconsi *inverse,* ed il passaggio da una figura all'altra si fà per una sostituzione a *raggi reciproci.* Così per due linee piane ed inverse le coordinate respettive $x$, $y$, ed X, Y con l'origine nel punto ove si cominciano a computare i raggi $r$, R, si avrà evidentemente

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y} = \frac{\sqrt{(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{k^2}{r^2}$$

d'onde

$$\mathrm{X} = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}$$

Di qui ne segue che prendendo $k = 1$, si passerà da una curva data alla sua inversa con sostituire $\frac{x}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, invece di $x$, $y$ : la costante $k$ si suol chiamare il *raggio d'inversione* appartenente ad un circolo dato. Differenziando ora i valori di X, Y si troverà

$$\mathrm{dX} = \frac{k^2 [ (y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y]}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \mathrm{dY} = \frac{k^2 [ (x^2 - y^2)\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}x]}{(x^2 + y^2)^2}$$

Di qui se si chiamino $s$, S gli archi di queste due curve inverse, corrispondenti alle coordinate $x$, $y$, ed X, Y, si avrà

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}, \qquad \mathrm{dS} = \sqrt{(\mathrm{dX}^2 + \mathrm{dY}^2)}$$

d'onde si trae dai valori di dX, dY

$$dS = \frac{k^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{x^2 + y^2} = \frac{k^2 ds}{r^2}, \text{ e viceversa} \qquad ds = \frac{k^2 dS}{R^2}.$$

Cioè in due linee inverse l'elemento dell'arco di una è eguale all'elemento dell'arco dell'altra diviso per il quadrato del raggio, e moltiplicato per la costante $k^2$ : fra gli archi poi S, ed $s$, si avrà

$$S = k^2 \int \frac{ds}{r^2}, \qquad \text{e} \qquad s = k^2 \int \frac{dS}{R^2}.$$

Volendo riferire le due curve invece alle coordinate polari, è chiaro che i due raggi R, $r$ formeranno il medesimo angolo $u$ con l'asse delle ascisse, quindi in forza della costante relazione $Rr = k^2$, si ricaverà

$$\frac{R du}{dR} = -\frac{r du}{dr}.$$

Ora nelle curve polari il rapporto $rdu \cdot dr$ rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo, che il raggio vettore forma con la tangente alla curva in un dato punto, quindi la precedente equazione porrà in evidenza l'enunciato 4º nella nota del Sig. *Hirst* pag. 163: di più per gli elementi differenziali dS, d$s$, si hà

$$dS^2 = dR^2 + R^2 du^2, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 du^2$$

d'onde

$$dS = \pm \frac{dR}{dr} ds = \pm \frac{ds}{r^2}$$

come già si era di sopra avvertito.

3º Accenniamo brevemente alcune applicazioni alle linee del secondo ordine: projettando il centro dell'ellisse sulla tangente si ottiene per il luogo geometrico di questa projezione una curva del quart'ordine la quale è l'*inversa* della curva *polare reciproca* dell'ellisse data. Ora la polare reciproca dell'ellisse è un'altra ellisse ad assi inversi, in guisa, che se si prenda $k = 1$ per raggio d'inversione, le due equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a^2x^2 + b^2y^2 = 1$$

rappresentano le due ellissi polari reciproche l'una dell'altra. Ciò posto poniamo per la seconda ellisse

$$ax = \cos\varphi, \qquad by = \operatorname{sen}\varphi$$

si avrà per l'elemento d$s$, e per il raggio $r$ con l'origine al centro

$$ds = \frac{d\varphi}{ab}\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi]}, \qquad r^2 = \frac{b^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}{a^2b^2}$$

d'onde per l'elemento dS della curva inversa si trae

$$dS = \frac{ab\, d\varphi \sqrt{[a^2-(a^2-b^2)\mathrm{sen}^2\varphi]}}{b^2+(a^2-b^2)\mathrm{sen}^2\varphi)}$$

la quale espressione di dS, coincide con quanto già ritrovai in una mia Memoria pubblicata nel Settembre 1844 nel giornale arcadico: l' arco S come ivi dimostrai dipende dai trascendenti ellittici di prima e terza specie a parametro positivo. Nello stesso modo il luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' iperbola sulle tangenti è una curva del quarto ordine, e diviene la *lemniscata di Bernoulli* nel caso dell'iperbola equilatera. Ora questa nuova curva del quart'ordine, è l'*inversa* della polare reciproca dell'iperbola, ed è anche essa un'iperbola ad assi inversi: scriviamo dunque le due equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad a^2x^2 - b^2y^2 = 1$$

e ponendo per la seconda

$$ax = \mathrm{cosec}\,\varphi\,, \qquad by = \cot\varphi$$

le due formole

$$ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}\,, \qquad r^2 = x^2+y^2$$

diverranno

$$ds = \frac{d\varphi}{ab\,\mathrm{sen}^2\varphi}\sqrt{(a^2+b^2-b^2\mathrm{sen}\,\varphi)}\,, \qquad r^2 = \frac{b^2+a^2-a^2\mathrm{sen}^2\varphi}{a^2b^2\mathrm{sen}^2\varphi}$$

d'onde per l'arco S della curva inversa

$$dS = \frac{ab\, d\varphi \sqrt{(a^2+b^2-b^2\mathrm{sen}^2\varphi)}}{a^2+b^2-a^2\mathrm{sen}^2\varphi}.$$

Nella citata Memoria del 1844 mi occupai anche della rettificazione di questa curva, egualmente dipendente dai trascendenti ellittici di prima, e terza specie.

4.° Nelle superficie inverse oltre l'equazione $Rr = k^2$ abbiamo simultaneamente per le coordinate X. Y, Z ed $x$, $y$, $z$ di due punti corrispondenti

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{R}{r} = \frac{k^2}{r^2} = \frac{k^2}{x^2+y^2+z^2}$$

d'onde

$$X = \frac{k^2x}{x^2+y^2+z^2}\,, \qquad Y = \frac{k^2y}{x^2+y^2+z^2}\,, \qquad Z = \frac{k^2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Dalle quali equazioni si vede, che quando il raggio $k$ della *sfera d'inversione* si prende eguale all'unità, si passa dall'equazione di una superficie all' equazione della

sua inversa con sostituire $\frac{x}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{z}{r^2}$ invece di $x$, $y$, $z$. Volendo riferire le due superficie alle coordinate polari, ponendo per i due angoli $p$, $q$

$$u = \cos p\,, \quad v = \operatorname{sen} p \cos q\,, \quad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

si avrà simultaneamente

$$X = Ru\,, \quad Y = Rv\,, \quad Z = Rw\,, \quad x = ru\,, \quad y = rv\,, \quad z = rw\,.$$

Ciò posto esprimiamo con $d^2S$, $d^2s$ gli elementi superficiali di second'ordine delle due superficie riferite alle coordinate polari, si avrà come è noto

$$d^2S = R dp\, dq \sqrt{[R_1^2 + (R^2 + R'^2) \operatorname{sen}^2 p\,]}$$

$$d^2s = r dp\, dq \sqrt{[r_1^2 + (r^2 + r'^2) \operatorname{sen}^2 p\,]}$$

ove $R'$, $R_1$, $r'$, $r_1$ rappresentano le derivate parziali di $R$, $r$ rapporto alle variabili $p$, $q$. Sostituendo ora nella prima formola

$$R = \frac{k^2}{r}\,, \qquad R' = -\frac{k^2 r'}{r^2}\,, \qquad R_1 = -\frac{k^2 r_1}{r^2}$$

si ricaverà

$$d^2S = \frac{k^4 r\, dp\, dq \sqrt{[r_1^2 + (r^2 + r'^2) \operatorname{sen}^2 p\,]}}{r^4} = \frac{k^4 d^2 s}{r^4}\,.$$

Quindi se si assuma $k = 1$ per raggio d'inversione, dall'elemento di una superficie si passa all'elemento dell'inversa, col dividere per la quarta potenza del raggio $r$. Risultato somigliante si otterrà fra gli elementi dei due volumi terminati dalle due superficie inverse: infatti per questi elementi $dV$, $dV_1$ in coordinate polari si ha

$$dV = \frac{1}{3} R^3 \operatorname{sen} p\, dp\, dq\,, \quad dV_1 = \frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} p\, dp\, dq$$

d'onde la prima, in forza dell'equazione $Rr = k^2$ diviene

$$dV = \frac{1}{3}\,\frac{k^6 \operatorname{sen} p\, dp\, dq}{r^3} = \frac{k^6\, dV_1}{r^6}\,;$$

cioè gli elementi dei due volumi sono nel rapporto di $k^6$ ad $r^6$, ed anche di 1 ad $r^6$ se si supponga $k = 1$.

5.° Indichiamo alcune applicazioni alle superficie del secondo grado. Projettando il centro dell'ellissoide su i piani tangenti, si ottiene come è noto per il luogo geometrico una superficie di quarto ordine conosciuta sotto il nome di *superficie di ela-*

*sticità* : questa superficie è nello stesso tempo l'inversa della polare reciproca dell'ellissoide. Ora la polare reciproca dell'ellissoide è un'altra ellissoide ad assi inversi in modo che prendendo eguale ad uno il raggio $k$ della sfera d'inversione si avrà per l'equazioni delle due superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1\,.$$

Ora ponendo per la seconda

$$x=r\cos p\,, \qquad y=r\,\mathrm{sen}\,p\cos q\,, \qquad z=r\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q$$

e di più

$$\mathrm{A}=\frac{1}{b^2c^2}\,, \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{a^2c^2}\,, \qquad \mathrm{C}=\frac{1}{a^2b^2}$$

si hà per l'elemento $\mathrm{d}^2s$ della superficie, e per il raggio $r$

$$\mathrm{d}^2s=\frac{1}{a^2b^2c^2}\,\mathrm{sen}\,p\;\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\;\frac{(\mathrm{A}^2u^2+\mathrm{B}^2v^2+\mathrm{C}^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}v^2+\mathrm{C}w^2)^2}$$

$$r^2=\frac{1}{a^2b^2c^2(\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}v^2+\mathrm{C}w^2)}\,.$$

Quindi l'elemento $\mathrm{d}^2\mathrm{S}$ della superficie inversa sarà

$$\mathrm{d}^2\mathrm{S}=a^2b^2c^2\,\mathrm{sen}\,p\;\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\sqrt{(\mathrm{A}^2u^2+\mathrm{B}^2v^2+\mathrm{C}^2w^2)}$$

od anche per la sostituzione dei valori di A, B, C

$$\mathrm{d}^2\mathrm{S}=\mathrm{sen}\,p\;\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\sqrt{(a^4u^2+b^4v^2+c^4w^2)}\,.$$

Tal'è l'espressione dell'elemento della superficie di elasticità, il quale elemento coincide con quello di un'altra ellissoide di semiassi $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$, d'onde la quadratura della nuova superficie si riduce alla quadratura di un' ellissoide : questo risultato fù già da me ritrovato in una mia Memoria pubblicata nel tomo 31. del Sig. Crelle per l'anno 1846 : di più in una breve nota inserita nella *Raccolta Scientifica di Roma* pel 16 Marzo 1845 enunciai il medesimo risultato, e che si ritrovava esposto e dimostrato nella mia citata Memoria. Per l'elemento $\mathrm{dV}_1$ della polare reciproca dell'ellissoide si ha simultaneamente

$$\mathrm{dV}_1=\frac{r^3\mathrm{sen}\,p\;\mathrm{d}p\;\mathrm{d}q}{3}\,, \qquad r=\frac{1}{abc\sqrt{(\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}v^2+\mathrm{C}w^2)}}\,.$$

Dividendo pertanto $\mathrm{dV}_1$ per $r^6$, si otterrà l'elemento del volume della superficie inversa vale a dire

$$\mathrm{dV}=\frac{1}{3}\,a^3b^3c^3\,\mathrm{sen}\,p\;\mathrm{d}p\;\mathrm{d}q\,\sqrt{(\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}v^2+\mathrm{C}w^2)^3}$$

od anche

$$dV = \frac{1}{3} \operatorname{sen} p \, dp \, dq \sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)^3}$$

Il secondo membro rappresenta l'elemento del volume della superficie di elasticità: l'integrazione dipende dai trascendenti ellittici di prima, e seconda specie, il che fu da me egualmente ritrovato nella citata Memoria inserita nel tomo 31 del Sig. Crelle.

6.° Terminerò questa breve nota con riportare le formole dalle quali dipende l'equazione della superficie, o della linea, *polare reciproca* di una superficie, o linea data. In molte mie precedenti Memorie pubblicate fin dal 1844, e negli anni seguenti, o nel giornale arcadico, e nella *Raccolta Scientifica*, o nei miei precedenti *Annali di Matematica*, e nel giornale del Sig. Crelle, mi sono più volte occupato di quelle superficie, e linee luogo geometrico della projezione ortogonale di un punto dato, che può prendersi per origine delle coordinate sulla direzione dei piani tangenti o delle rette tangenti. Così nel tomo 34 del giornale del Sig. Crelle occupandomi specialmente della teorica di queste superficie derivate, ritrovai, che se

$$u = f(x, y, z) = 0$$

sia l'equazione di una superficie a coordinate ortogonali, e si projetti il centro sui piani tangenti le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque di questa projezione corrispondenti ad un punto dato $(x, y, z)$ saranno espresse per

$$X = \frac{D_xu(xD_xu + yD_yu + zD_zu)}{(D_xu)^2 + (D_yu)^2 + (D_zu)^2}, \quad Y = \frac{D_yu(xD_xu + yD_yu + zD_zu)}{(D_xu)^2 + (D_yu)^2 + (D_zu)^2},$$

$$Z = \frac{D_zu(xD_xu + yD_yu + zD_zu)}{(D_xu)^2 + (D_yu)^2 + (D_zu)^2}.$$

Chiamando R la distanza fra l'origine ed il punto (X, Y, Z), e che sarà evidentemente la perpendicolare abbassata dall'origine sul piano tangente la superficie nel punto $(x, y, z)$, si troverà

$$R = \pm \frac{(xD_xu + yD_yu + zD_zu)}{\sqrt{[(D_xu)^2 + (D_yu)^2 + (D_zu)^2]}}.$$

Nei valori di X, Y, Z le variabili $x$, $y$, $z$ potendosi ridurre a due, ne segue, che l'equazione della nuova superficie derivata sarà la risultante proveniente dall'eliminazione di queste due variabili. Ora *l'inversa* di questa superficie sarà precisamente la *polare reciproca* della superficie data $u = 0$; quindi è che sostituendo ad X, Y, Z, $\frac{k^2X}{R^2}$, $\frac{k^2Y}{R^2}$, $\frac{k^2Z}{R^2}$ le nuove coordinate X, Y, Z apparterranno ad un punto della *polare reciproca* corrispondente ad un punto dato della superficie $u = 0$. Con questa

sostituzione si ricava

$$X = \frac{k^2 D_x u}{(xD_x u + yD_y u + zD_z u)}, \qquad Y = \frac{k^2 D_y u}{(xD_x u + yD_y u + zD_z u)},$$

$$Z = \frac{k^2 D_z u}{(xD_x u + yD_y u + zD_z u)}.$$

Per mostrare una qualche applicazione supponiamo che l'equazione $u = 0$ della superficie si riduca ad un'ellissoide con l'origine al centro, per cui si abbia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

avremo

$$D_x u = \frac{2x}{a^2}, \qquad D_y u = \frac{2y}{b^2}, \qquad D_z u = \frac{2z}{c^2},$$

$$xD_x u + yD_y u + zD_z u = 2$$

d'onde

$$X = \frac{k^2 x}{a^2}, \qquad Y = \frac{k^2 y}{b^2}, \qquad Z = \frac{k^2 z}{c^2}.$$

L'eliminazione delle $x$, $y$, $z$ per ottenere l'equazione della nuova superficie è assai facile; infatti dalle medesime formole abbiamo

$$\frac{aX}{k^2} = \frac{x}{a}, \quad \frac{bY}{k^2} = \frac{y}{b}, \quad \frac{cZ}{k^2} = \frac{c}{z}.$$

Di qui si trae per l'equazione della *polare reciproca*

$$a^2X^2 + b^2Z^2 + c^2Z^2 = k^4$$

la quale appartiene ad un' altra ellissoide con la medesima origine, e descritta sui medesimi assi. Ognun vede, che risultati somiglianti si otterrebbero per le *polari reciproche* delle due iperboloidi, non che per le linee del secondo ordine dotate di centro.



*

## G. LEJEUNE DIRICHLET.

Ne'miei *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* tom. 2.° 1851 si rammentava il soggiorno in Roma nel 1844 del gran Geometra *Jacobi*, mancato ai vivi nello stesso anno 1851 con indicibile dolore di tutta la dotta Europa, e di tutti i suoi più cari amici nella fresca età di anni 46. Chi mai avrebbe potuto immaginare che di uno de'suoi più celebri, e più illustri amici, e compagni, che fu quasi indivisibile nel suo viaggio in Roma, ne avessimo a deplorare la fatale perdita dopo il breve intervallo di otto anni? E pur così è. *Dirichlet* geometra di primo ordine, degno successore del *Gauss* sparve quasi improvisamente nello scorso 5 Maggio nell'età ancor vigorosa di anni 54 circa. Siamo certi, che sopravivendo il *Dirichlet* ad una più lunga età, esso avrebbe fatte nelle scienze Matematiche delle ulteriori importanti scoperte. Dall'Ottobre 1843 fino all'Aprile 1844 esso si trovò in Roma con l'intera famiglia sua in allora composta dell'amatissima sua sposa, e di due piccoli figli, e son persuaso che un notabile decremento alla salute del *Dirichlet* sia provenuto dalla perdita, della sua consorte negli ultimi mesi dello scorso anno 1858. Come già ho di sopra indicato nel suo viaggio in Roma era compagno del *Jacobi*, e con essi trovaronsi ancora i Sigg. *Steiner* e *Borchardt*. La conversazione scientifica del *Dirichlet* era della più grand'utilità per la profondità, e nettezza delle idee, che veniva a dichiarare. Il *Dirichlet* era un ammiratore delle innumerabili ed importanti Memorie pubblicate dal *Jacobi* in tutte le parti delle Matematiche, ed il *Jacobi* riconosceva il *Dirichlet* come una maravigliosa e penetrante intelligenza nella ricerca delle più difficili questioni matematiche, specialmente scelte nella teorica dei numeri. Il *Jacobi* più volte dicea che la mente del *Dirichlet* per le matematiche era paragonabile alla mente del *Lagrange*, espressione superiore a qualunque elogio. Il *Dirichlet* nella sua età ancora giovane assai cominciò a pubblicare interessanti Memorie di Matematiche, nella teorica de'numeri in particolare. A cominciar del tom. 3.° del giornale del Sig. *Crelle* 1828 fino al tom. 47.°, 1854 trovo ventisei Memorie: altre due ne pubblicò nel tom. 53.° nel 1857. Ve ne sono inoltre altre sei nel giornale del Sig. *Liouville*, e non poche ne contengono i volumi degli Atti di Berlino. In questi ultimi anni il *Dirichlet* ha pubblicato poche Memorie, ma tutte le sue produzioni hanno il raro pregio che sempre si manterranno esse nella scienza come un vero monumento. Tutte le questioni da lui trattate, e nella teorica de'numeri, e nello sviluppo delle serie periodiche, nella riduzione degli integrali definiti, ed infine quelle di Meccanica e di Fisica Matematica tutte contengono scoperte capitali nella scienza, ed hanno contribuito a quell'avanzamento e perfezionamento che si desiderava nella medesima. In una sì grave mancanza ci sia almeno dato, o di veder presto la pubblicazione di un qualche scritto inedito lasciato dall'illustre Matematico, od anche di aver in un sol volume riunite tutte le sue ammirabili Memorie. *B. T.*

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLIMINATION PAR LE CHEVALIER FRANÇOIS FAÀ DE BRUNO, *Paris* Librairie Centrale des Sciences LEIBER ET FARAGUET Rue de Seine—Saint—Germain N.° 13, 1859 1. vol. in 8.° pag. 224.

Il libro, che annunziamo qui, non può mancare d'essere bene accolto dai Matematici. Esso riempie una lacuna nella letteratura delle scienze esatte; perocchè dall'opera omai antiquata di Bezout in fuori, non si saprebbe citare un'altro scritto, che tratti *ex professo* le quistioni, che nell'opera del Signor Faà di Bruno vengono enucleate.

E se ottimi sono l'idea fondamentale e il proposito, è pure assai commendevole l'esecuzione. Il ch.mo autore raccolse accuratamente e dispose con bell'ordine, formandone un corpo di scienza, que'materiali, che si trovavano sparsi e come perduti in opere periodiche rare e difficilmente accessibili agli studiosi. Ma non si contentò, checchè protesti egli stesso nel proemio del suo libro, dell'arida fatica del compilatore; che anzi sempre ordinò, soventi rischiarò, qualche volta perfezionò il lavoro dei suoi predecessori, incorporandogli talora que' risultamenti nuovi ai quali era giunto nel corso delle sue elucubrazioni.

Indicheremo per sommi capi le materie trattate dal sig. Cav. Faà. Egli espone per le equazioni algebriche ad una e a più incognite la formazione delle funzioni simmetriche delle radici, la formola del Waring pel caso d'una sola incognita, e la formola analoga data in questi *Annali* dal prof. Betti per $n$ equazioni fra $n$ incognite; spiega i diversi metodi d'eliminazione, anche quelli del Sylvester, anche il metodo di Liouville dedotto dalla risoluzione in serie, ed il recente di Hermite che considera la risoluzione come il discriminante d'una funzione di secondo grado, e assegna il grado della equazione finale, riferendo pel caso di equazioni non canoniche il metodo del signor Minding; dimostra il teorema di Jacobi intorno alle soluzioni comuni di più equazioni, e determina il numero delle soluzioni indipendenti, onde emerge la spiegazione d'un paradosso d'Eulero; insegna il modo di trovar le soluzioni comuni, stabilisce le proprietà della risultante e varj teoremi di Brioschi, di Raabe, di Schlæffli, e amplia al caso d'un numero qualsivoglia di equazioni e di incognite il teorema di Lagrange sopra le condizioni necessarie alla esistenza d'una o più radici comuni a due equazioni. A compimento del qual teorema in cui sono comprese le condizioni indicate dal prof. Betti in questi *Annali*, 1858, pag. 7—8, mancherebbe soltanto che

fosse aggiunta, come l'aggiunse il Betti, l'equazione che ha per radici le radici o soluzioni comuni delle proposte, e che pel caso di due sole equazioni date trovammo per la prima volta in una Nota del prof. Brioschi (*).

Chiudono l'opera cinque Note sopra una formola che esprime la derivata d'una funzione di funzione, sopra una formola di Borchardt per calcolare le funzioni simmetriche (**), che il Betti ha ampliata, sopra un teorema di Cayley pure appartenente alle funzioni simmetriche, sul termine generale della serie di Maclaurin applicata alla funzione d'una funzione di due o più variabili, e da ultimo sopra un teorema del prof. Betti relativo alla determinazione delle funzioni d'un solo sistema di soluzioni comuni (***).

Da questa succinta enumerazione e quasi indice si può abbastanza scorgere quante cose importanti siano contenute nel libro del signor Faà. Potrebbesi veramente desiderare, che l'esposizione delle materie, la quale nei primi capitoli è netta, perspicua e concisa a un tempo, conservasse queste doti, anzi aumentasse di chiarezza, ne'sus-

---

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1855, pag. 81. Veggasi anche la traduzione francese della *Teorica dei determinanti.*

Cercando la dimostrazione della equazione data dal prof. Betti, mi sono avveduto d'un errore che vi è corso probabilmente di copia o di stampa, e colgo questa occasione per emendarlo secondo il giudizio mio. I termini della equazione debbono essere moltissimi pei coefficienti binomiali, $1, \frac{t}{1}, \frac{t(t-1)}{1.2}$, ecc. Si dimostrerà in una maniera semplice l'equazione esatta, se chiamata $f=0$ una equazione tra $n$ incognite $x, y, z, \ldots$, chiamato $a$ il termine cognito di $f$, e $b$ il coefficiente che ha in $f$ il prodotto $\varphi = x^p\ y^q\ z^r \ldots$, si risguardi $f$ come funzione di due variabili indipendenti $a$ e $b$: poichè supposto che da altre $n$ equazioni si ricevino $\mu$ sistemi di valori per le incognite, e che i valori corrispondenti di $\varphi$ e $f$ siano $\varphi_1$ e $f_1$, $\varphi_2$ e $f_2, \ldots \varphi_\mu$ e $f_\mu$, si avrà la *risultante* delle $n+1$ equazioni $R = f_1 f_2 \ldots f_\mu$, e cambiato $a$ in $a + k\,da$, $b$ in $b + k\,db$, dove $k$ è indeterminato, $f$ diverrà $f + k(da + \varphi\, db)$, e R si cambierà in $R + k\frac{dR}{1} + k^2 \frac{d^2L}{1.2} + k^3 \frac{d^3R}{1.2.3} + \ldots$, ma dovrà restar identica al prodotto dei nuovi valori di $f_1, f_2, \ldots$; quindi se i valori $f_1, f_2, \ldots f_m$ corrispondano ad $m$ sistemi di soluzioni comuni e siano perciò nulle, paragonando i coefficienti delle potenze $k^0, k, k^2, \ldots k^{m-1}$ si otterranno le $m$ equazioni di condizione

$$R = 0,\quad dR = 0,\quad d^2R = 0, \ldots d^{m-1}R = 0,$$

paragonando i coefficienti della potenza $k^m$ si troverà $d^mR$ *proporzionale* al prodotto

$$(da + \varphi_1\, db)(da + \varphi_2\, db) \ldots (da + \varphi_m\, db),$$

e svolgendo $d^mR$ secondo la formola simbolica $d^mR = (d_a + d_b)^m R$ e confrontando i termini simili, se ne conchiuderanno le espressioni della somma delle $m$ radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, dei loro prodotti a due a due, a tre a tre, ecc. onde infine,

$$\frac{d^mR}{da^m}\varphi^m - \frac{m}{1}\frac{d^mR}{da^{m-1}\,db}\varphi^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^mR}{da^{m-2}\,db^2}\varphi^{m-2} - \ldots \pm \frac{d^mR}{db^m} = 0.$$

(**) Un altro teorema relativo alle funzioni simmetriche fu in questi *Annali* (1858, pag. 43) attribuito al signor Borchardt, che infatti lo diede senza accennare e certo senza sapere che altri lo avesse già pubblicato: ma quel teorema era già stato dimostrato dal Cauchy nella sua Memoria del 1837 *Sur la résolution des équations d'une degré quelconque*, §. III, pag. 31.

(***) Vedi *Annali*, 1858, pag. 4, *Teorema II.*

seguenti, che trattano soggetti più complicati. Ma forse l'autore, spinto da ragioni ignote allo scrivente, è stato costretto ad affrettare la pubblicazione del suo scritto, circostanza, che può avergli impedito di stendere le ultime parti del suo lavoro con tutta quella pacatezza d'animo, che domandano i lavori d'una certa levatura.

Devesi però, a scusa del ch$^{mo}$. autore notare, che le materie trattate nella seconda metà della sua scrittura, appartenendo alle più ardue specolazioni dell'algebra, presentano gravi difficoltà per chi pretende di farne un'esposizione facile e piana, senza cadere in lungaggini. Questo può assolvere il signor Faà di Bruno dall'accennata imputazione, benchè resti sempre in un cantuccio dell'animo di chi legge un desiderio, ch'egli meno della brevità, e più della chiarezza fosse stato studioso.

Puossi ancora dubitare, che alcune parti del suo lavoro facciano quello, che i Francesi chiamano *double emploi*: nè si vede bene, perchè, dopo avere trattato di due equazioni a una variabile, poi due a due variabili, quindi tre a tre variabili, tre a due ecc. ecc. separatamente, non occorra continuare e andare Dio sà fin dove. Però quest'obbiezione è confutata in parte; per chi legge attentamente il libro, dalla osservazione, che sempre ne'singoli casi si considera il subbietto sotto un punto di veduta affatto speciale, e che i casi più semplici preparano e appianano la via ai più difficili.

Checchè sia di questi piccoli néi, che crediamo scorgere nello scritto del signor Faà di Bruno, noi crediamo debito nostro di raccomandare caldamente ai cultori delle scienze matematiche questo libro, nel quale essi troveranno molte nozioni utili e peregrine, di raccomandarlo come uno di quei trattati di cui diede un modello eccellente il prof. Brioschi con la sua *Teorica dei determinanti*, e che tanto giovano a divulgare i progressi della scienza e a preparar loro l'accesso delle pubbliche scuole dalle quali certi arroganti *conservatori* dell' ignoranza e d' ogni anticaglia vorrebbero tenerli in perpetuo lontani.

F. G.



# PUBBLICAZIONI RECENTI

A. Mannheim. — Construction des Centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure qui glisse sur son plan ( Extrait du Journal de l'École polytechnique XXXVII Cahier).

E. Catalan — Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux, et des signes contraires (Extrait du Journal de l'École polytechnique XXXVII Cahier).

V. A. Lebesgue. — Exercices d'analyse numérique , extraits , commentaires , et recherches relatifs à l'analyse indeterminée. *Paris* 1859, 1. vol. in 8°

Cossali. — Scritti inediti pubblicati da Baldassarre Boncompagni, seguiti da un'Appendice contenente quattro Lettere dirette al medesimo P. Cossali, ed una Nota intorno a queste lettere. *Roma*, Tipografia delle Belle Arti, 1857. 1. Vol. in 4°

Leonardo Pisano — Scritti inediti pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Volume I. (Leonardi Pisani — Liber Abbaci). *Roma*. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857. 1, Vol. in 4°

## INTORNO ALLE CONICHE INSCRITTE IN UNA STESSA SUPERFICIE SVILUPPABILE DEL QUART'ORDINE (E TERZA CLASSE).

### NOTA

DEL SIG. PROF. LUIGI CREMONA.

È noto che i piani osculatori di una *cubica gobba* (linea a doppia curvatura di terz'ordine) inviluppano una superficie sviluppabile del quart'ordine (e per conseguenza della terza classe) e ciascun piano osculatore taglia la sviluppabile secondo una conica. Io ho dimostrato in una memoria inserita in questi *Annali* (1858) che il luogo dei centri di tutte le coniche analoghe è un'altra conica piana. Ora ho ricercato la natura di tutte quelle coniche inscritte in una stessa sviluppabile del quart'ordine, e indagando come ne fossero distribuiti i centri sulla *conica locale*, sono arrivato ad alcuni teoremi, che hanno una singolare affinità con quelli dati recentemente dal Trudi (*) e dallo Steiner (**) sulle coniche circoscritte ad uno stesso tetragono.

Assumo come origine di tre coordinate rettilinee obbliquangole un punto arbitrario della cubica gobba; l'asse delle $z$ sia tangente alla curva, e il piano $yz$ sia osculatore; l'asse delle $x$ sia parallelo ad un assintoto della cubica, ossia diretto ad uno de'punti della medesima, che sono a distanza infinita: de' quali ve n'ha sempre almeno uno reale. Da ultimo il piano $xy$ passi per l'assintoto dianzi nominato. Ciò posto, la cubica potrà essere rappresentata, in tutta la generalità, dal sistema di equazioni:

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{\theta^3}{\varphi}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\theta^2}{\varphi}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{\theta}{\varphi}$$

ove è posto per brevità:

$$\varphi = (\theta - \alpha)^2 \pm \beta^2$$

$a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$ sono costanti determinate; $\theta$ è un parametro variabile da un punto all'altro della linea. Nel valore di $\varphi$ il doppio segno dell'ultimo termine serve a distinguere i due casi che la cubica abbia uno solo o tre assintoti reali. L'origine è quel punto della linea che corrisponde a $\theta = 0$; per $\theta = \infty$ si ha quel punto della medesima che è a distanza infinita sull'asse delle $x$. Posto:

$$h = \alpha^2 \pm \beta^2$$

il piano che sega la cubica ne'tre punti di parametri $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sarà rappresentato

(*) Memorie dell'Accademia di Napoli, 1857.
(**) Monatsberichte der berliner Akademie, Iuli 1858.

dall'equazione:

$$h\frac{x}{a}+\{\theta_1\theta_2\theta_3-h(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}\frac{y}{b}$$

$$+\{h(\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1+\theta_1\theta_2)-2\alpha\theta_1\theta_2\theta_3\}\frac{z}{c}-\theta_1\theta_2\theta_3=0;$$

quindi l'equazione del piano osculatore nel punto di parametro $\theta$ è:

$$(2)\qquad h\frac{x}{a}+\theta(\theta^2-3h)\frac{y}{b}+\theta^2(3h-2\alpha\theta)\frac{z}{c}-\theta^3=0$$

e quelle della retta che unisce due punti $\theta_1$, $\theta_2$ sono:

$$\frac{x}{a}-(\theta_1+\theta_2)\frac{y}{b}+\theta_1\theta_2\frac{z}{c}=0,$$

$$(\theta_1\theta_2-h)\frac{y}{b}+\{h(\theta_1+\theta_2)-2\alpha\theta_1\theta_2\}\frac{z}{c}-\theta_1\theta_2=0.$$

Il piano osculatore al punto $\theta$ è tagliato dal piano osculatore al punto $\omega$ in una retta, la cui proiezione sul piano $yz$ ha per equazione:

$$\omega^2\left(\frac{y}{b}-2\alpha\frac{z}{c}-1\right)+\omega\left\{\theta\left(\frac{y}{b}-1\right)+(3h-2\alpha\theta)\frac{z}{c}\right\}$$

$$+(\theta^2-3h)\frac{y}{b}+\theta(3h-2\alpha\theta)\frac{z}{c}-\theta^2=0.$$

Da questa equazione e dalla sua derivata presa rispetto ad $\omega$ eliminando questa quantità, si ha la:

$$(3)\qquad (4h-\theta^2)\frac{y^2}{b^2}+(3h-2\alpha\theta)(h+2\alpha\theta)\frac{z^2}{c^2}$$

$$+2(2\alpha\theta^2-\theta h-4\alpha h)\frac{y}{b}\frac{z}{c}+2(\theta^2-2h)\frac{y}{b}+2\theta(h-2\alpha\theta)\frac{z}{c}-\theta^2=0.$$

Questa equazione insieme colla (2) rappresenta quindi la conica secondo la quale il piano osculatore al punto $\theta$ sega la superficie sviluppabile, luogo delle rette tangenti alla cubica gobba. La conica (2) (3) è iperbole od ellisse secondo che la quantità:

$$\Delta=(\theta-\alpha)^2\mp 3\beta^2$$

è positiva o negativa. Dunque:

*Quando lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile del quart'ordine* (*)

(*) Ogni superficie sviluppabile di quart'ordine ha per ispigolo di regresso una cubica gobba: teorema del sig. Chasles (*Aperçu historique*. Nota 33.a)

*ha tre assintoti reali, tutte le coniche inscritte nella medesima (e poste ne' suoi piani tangenti) sono iperboli.*

Le coordinate del centro della conica (2) (3) sono date dalle:

$$(4)\qquad 2\Delta\frac{x}{a}=3\theta(2\alpha\theta-3h)\,,\quad 2\Delta\frac{y}{b}=2\theta(\theta-\alpha)-3h\,,\quad 2\Delta\frac{z}{c}=\theta-4\alpha$$

da cui eliminando $\theta$ si hanno le equazioni della *conica locale de'centri*:

$$(5)\qquad h\frac{x}{a}+2\alpha(3h-4\alpha^2)\frac{y}{b}+(3h-4\alpha^2)^2\frac{z}{c}+\alpha(8\alpha^2-9h)=0.$$

$$(6)\qquad 2\left\{(8\alpha^2-3h)\frac{z}{c}+4\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\right\}^2$$

$$+\left(1+2\alpha\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\left\{2(4\alpha^2+3h)\frac{y}{b}-16\alpha^3\frac{z}{c}-(8\alpha^2+3h)\right\}=0.$$

Questa conica è iperbole od ellisse secondo che la quantità:

$$h-\alpha^2=\pm\beta^2$$

è positiva o negativa; dunque:

*Il luogo de'centri delle coniche inscritte in una superficie sviluppabile del quart' ordine è un'iperbole o un' ellisse secondo che lo spigolo di regresso ha un solo o tre assintoti reali.*

Nel caso che la cubica gobba abbia un solo assintoto reale, la conica (2) (3) è iperbole o ellisse secondo che è positiva o negativa la quantità $\Delta$. Formando (in ciò seguo il metodo del Trudi) questa quantità colle coordinate $y, z$ del centro della conica medesima, si ha:

$$\Delta=\frac{\frac{3}{2}h}{\frac{y}{b}-2\alpha\frac{z}{c}-1}$$

quindi la specie della conica dipende dal segno del trinomio, che è nel denominatore; ora basta osservare la (6) per accorgersi che l'equazione:

$$\frac{y}{b}-2\alpha\frac{z}{c}-1=0$$

insieme colla (5) rappresenta una tangente dell'*iperbole locale de'centri.* Dunque quel trinomio sarà positivo o negativo secondo che il punto di coordinate $x, y, z$ centro della conica (2) (3) cade da una banda o dall'altra di questa tangente, cioè, secondo che cade nell'uno o nell'altro ramo dell'*iperbole locale.* Dunque:

*Quando lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile di quart'ordine ha un solo assintoto reale, in questa sono inscritte infinite ellissi, infinite iperboli e*

*due parabole; e i centri di queste coniche sono distribuiti nell' iperbole locale in modo che un ramo di questa contiene i centri delle ellissi, e l'altro ramo i centri delle iperboli.*

Un piano qualunque contiene, com' è noto, una retta intersezione di due piani osculatori: i quali, per un teorema che io ho dimostrato in un'altra memoria (*), sono reali o ideali secondo che quel piano sega la cubica in un solo punto reale o in tre. Dunque una cubica gobba ha due piani osculatori paralleli soltanto nel caso che vi sia un solo assintoto reale. È evidente che le coniche secondo cui questi due piani segano la sviluppabile sono parabole. Nella nostra notazione le due parabole corrispondono a $\Delta = 0$, cioè a $\theta = \alpha \pm \beta\sqrt{3}$; quindi per esse l'equazione (3) diviene:

$$\left\{\frac{y}{b}(\beta \mp \alpha\sqrt{3}) + \frac{z}{c}(\alpha \mp \beta\sqrt{3})(\beta \pm \alpha\sqrt{3})\right\}^2$$

$$+ 2(\beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{3})\frac{y}{b} + 2(\beta^2 - \alpha^2 \mp 2\alpha\beta\sqrt{3})\frac{z}{c} - (\alpha \pm \beta\sqrt{3})^2 = 0$$

quindi i diametri delle due parabole sono paralleli agli assintoti dell' iperbole locale (5) (6). I piani delle parabole sono rappresentati dalle :

$$h\frac{x}{a} + 2\alpha(3h - 4\alpha^2)\frac{y}{b} + (3h - 4\alpha^2)^2\frac{z}{c} = (\alpha \pm \beta\sqrt{3})^2$$

epperò sono paralleli al piano (5) dell'iperbole locale : proprietà che ho già fatto notare altrove (**). Inoltre è facile vedere che il piano (5) è equidistante dai due piani delle parabole : dunque :

*Quando lo spigolo di regresso d'una superficie sviluppabile del quart'ordine ha tre assintoti reali, essa non ha piani tangenti paralleli, epperò nessuna parabola è inscritta nella medesima. Ma se v' ha un solo assintoto reale, v'hanno pure due piani tangenti paralleli, i quali tagliano la superficie secondo due parabole. Il piano dell'iperbole locale è parallelo a questi due piani tangenti paralleli e da essi equidistante; ed inoltre i diametri delle parabole sono paralleli agli assintoti della locale.*

Se nel primo membro della (5) si pongono per $x$, $y$, $z$ i valori (1) si ha il risultato :

$$(\theta - \alpha)\left\{(\theta - \alpha)^2 \pm 9\beta^2\right\}$$

dunque il piano della locale incontra sempre la cubica nel punto reale che corrisponde a $\theta = \alpha$; in nessun altro punto se la cubica ha un solo assintoto reale; nel caso di tre assintoti reali ancora in altri due punti reali :

$$\theta = \alpha + 3\beta, \qquad \theta = \alpha - 3\beta.$$

(*) Annali, gennaio—febbraio 1859.
(**) Annali, gennaio—febbraio 1859.

Ciò risulta anche da un teorema ricordato di sopra. Osservato poi che si ha:

$$\Delta = (\theta - \alpha - \beta\sqrt{3})(\theta - \alpha + \beta\sqrt{3})$$

si conchiude facilmente che, siccome in ogni piano osculatore della cubica esiste una conica inscritta nella sviluppabile, così:

*Se la cubica gobba ha un solo assintoto reale, corrispondono ellissi a tutti i punti di essa compresi fra i due piani osculatori paralleli; iperboli a tutt'i punti rimanenti.*

Altrove ho denominato *fuoco* (*) di un piano il punto, sempre reale, ove concorrono i piani osculatori della cubica nelle intersezioni di essa col piano. Ora è facile vedere che il *fuoco* del piano (5) e il centro della conica locale (5) (6) coincidono in uno stesso punto, le cui coordinate sono:

$$\frac{x}{a} = \frac{\alpha(9h - 8\alpha^2)}{4(h - \alpha^2)}, \quad \frac{y}{b} = \frac{3h - 2\alpha^2}{4(h - \alpha^2)}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\alpha}{4(h - \alpha^2)}$$

cioè:

*I piani osculatori della cubica gobba ne' punti ov'essa è incontrata dal piano della conica locale passano pel centro di questa conica.*

Le formole relative alla cubica gobba divengono più semplici, senza punto scemare di generalità, se si pone $\alpha = 0$, cioè se si assume come origine delle coordinate il punto reale (o uno de' tre punti reali) in cui la cubica è segata dal piano (5). Allora la curva è rappresentata dalle:

$$\frac{x}{a} = \frac{\theta^3}{\theta^2 + h}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\theta^2}{\theta^2 + h}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\theta}{\theta^2 + h}$$

ove $h = \pm \beta^2$. L'equazione (5) diviene:

$$(5)' \qquad \frac{x}{a} + 9h\frac{z}{c} = 0$$

Mediante queste formole sì semplici si dimostra facilmente la proprietà che segue. Il cono di second' ordine che passa per la cubica gobba ed ha il vertice al punto di parametro $\theta$ è rappresentato dalla:

$$\left(\frac{x}{a} - \theta\frac{y}{b}\right)\left(\theta\frac{y}{b} + h\frac{z}{c} - \theta\right) - h\left(\frac{y}{b} - \theta\frac{z}{c}\right)^2 = 0$$

esso è segato dal piano (5)' in una conica la cui proiezione sul piano $yz$ è rappresentata dalla:

(*) Per questa denominazione ho seguito l'esempio dell'illustre Chasles: veggansi i *Comptes rendus* del 1843. In questa teoria de' *fuochi* sembra importante da considerarsi la retta che contiene i *fuochi* de' piani paralleli a quello della *conica locale*.

$$(\theta^2 + h)\frac{y^2}{b^2} + h(9h + \theta^2)\frac{z^2}{c^2} + 8h\theta\frac{yz}{bc} + 9\theta h\frac{z}{c} + \theta\frac{y}{b} = 0.$$

Qualunque sia $\theta$, questa equazione rappresenta una ellisse od un'iperbole secondo che $h$ è positiva o negativa; dunque :

*Il piano della conica luogo de' centri delle coniche inscritte in una superficie sviluppabile del quart'ordine sega i coni di second'ordine passanti per lo spigolo di regresso di questa secondo coniche che sono tutte di una medesima specie; e propriamente sono ellissi, iperboli o parabole secondo che la locale è iperbole, ellisse o parabola.*

Per conseguenza :

*Se una cubica gobba ha tre assintoti reali , per essa passano tre cilindri ( di second'ordine) iperbolici; se ha un solo assintoto reale, per essa passa un solo cilindro (di second'ordine) ellittico.*

Dalle proposizioni suesposte credo che emerga l'importanza di dividere le cubiche gobbe in due generi :

Primo genere : la curva ha tre assintoti reali; non vi sono piani osculatori paralleli, i piani osculatori segano la superficie sviluppabile da essi inviluppata secondo coniche che sono tutte iperboli; i centri delle quali sono tutti in un'ellisse. Il piano di quest'ellisse sega la cubica in tre punti reali, e i coni di second'ordine passanti per quest'ultima in altrettante coniche che sono tutte iperboli.

Secondo genere : la cubica gobba ha un solo assintoto reale, ed ha due piani osculatori paralleli, i quali segano la superficie sviluppabile (della quale la cubica è lo spigolo di regresso) secondo parabole , mentre gli altri piani osculatori la segano secondo ellissi o iperboli. I centri di queste coniche sono in un'iperbole posta in un piano parallelo ai due piani osculatori paralleli e da essi equidistante. In un ramo dell'iperbole locale sono i centri delle ellissi, nell'altro ramo i centri delle iperboli. Il piano dell'iperbole locale sega la cubica in un solo punto reale, e i coni di second' ordine passanti per quest'ultima in altrettante coniche che sono tutte ellissi.

Vi sono poi due casi particolari, interessanti a considerarsi e sono :

1.º La cubica gobba può avere un solo assintoto reale a distanza finita, e gli altri due coincidenti a distanza infinita. Il che torna a dire che il piano all' infinito seghi la cubica gobba in un punto e la tocchi in un altro. In questo caso la linea può essere rappresentata colle equazioni :

$$\frac{x}{a} = \frac{\theta^3}{(\theta-\alpha)^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\theta^2}{(\theta-\alpha)^2}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{\theta}{(\theta-\alpha)^2}$$

colle quali si dimostrano facilmente le seguenti proprietà, le quali ponno però essere dedotte anche dai teoremi generali dimostrati sopra :

*Le coniche inscritte in una superficie sviluppabile di quart' ordine, che abbia una generatrice a distanza infinita, sono tutte iperboli, ad eccezione di una sola che è una parabola, e i loro centri giacciono in un'altra parabola. Le due parabole sono nel medesimo piano, il quale sega i coni di second'ordine passanti per la cubica gobba, spigolo di regresso della sviluppabile, secondo coniche tutte parabole. Per la cubica passano due cilindri (di second'ordine) uno parabolico e l'altro iperbolico.*

Questa cubica gobba particolare può considerarsi come appartenente all'uno o all' altro de'due generi sopra accennati. Infatti, essa apparterrà al primo genere, ove s'immagini che i tre punti comuni alla cubica ed al piano della locale vengano a riunirsi in un solo, che va necessariamente a distanza infinita. Ovvero apparterrà al secondo genere, se si supponga che i due piani osculatori paralleli vengano a coincidere fra loro, epperò anche col piano della conica locale.

2.° La cubica può avere tutti gli assintoti coincidenti a distanza infinita, ossia essa può essere osculata dal piano all'infinito. In tal caso essa è rappresentabile colle equazioni semplicissime:

$$\frac{x}{a} = \theta^3 , \quad \frac{y}{b} = \theta^2 , \quad \frac{z}{c} = \theta$$

e si ha il teorema:

*Una superficie sviluppabile del quart'ordine che abbia un piano tangente a distanza infinita è tagliata da tutti gli altri piani tangenti secondo parabole. Per lo spigolo di regresso passa un solo cilindro (di second'ordine) parabolico.*

In quest'ultimo caso (che è una particolarizzazione del precedente) la curva, oltre le proprietà generali di ogni cubica gobba, ne ha molte di speciali, di cui si tratterà in altra occasione.

Cremona, 22 febbraio 1859.



# NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

PAR A. MANNHEIM

Capitaine d'Artillerie, répétiteur à l'Ecole Polytechnique.

Dans cette note, je me propose de développer la solution du problème suivant, solution insérée au tome 1$^{er}$ de ce recueil.

1. *Etant données* (Fig. 1) *deux courbes quelconques* A, A' *et un point* $f$ *arbitraire dans le plan de ces courbes; de ce point, on mène une transversale quelconque qui coupe* A *au point* a *et* A' *au point* a'; *de ces points, on mène aux courbes* A *et* A' *les tangentes* al, a'l *qui se coupent en* l; *on demande la tangente au lieu décrit par le point* l *lorsque la transversale tourne autour du point* $f$. (*)

Pour résoudre cette question, avons nous dit, on remplace en $a$ et en $a'$ les courbes A et A' par des coniques osculatrices, ayant pour foyer commun le point $f$, et l'on cherche pour celles-ci l'axe d'homologie qui passe par le point $l$. Cette droite, qui est la tangente cherchée, passant aussi par le point de rencontre des directrices de ces coniques, est facile à déterminer. D'après cela, il faut chercher les directrices de ces coniques. Du centre de courbure $c$, correspondant au point $a$ de A, abaissons sur $a\,a'$ la perpendiculaire $cp$; du point $p$, abaissons sur $ac$ la perpendiculaire $pq$: la ligne $fq$ est l'axe de la conique osculatrice de A, laquelle a pour foyer $f$. Elevons sur $aa'$ la perpendiculaire $fe$ qui coupe $al$ en $e$; le point $e$ est un point de la directrice de cette conique : la perpendiculaire abaissée de ce point sur $fq$ est donc cette directrice.

De même, la directrice de la conique osculatrice de A' est la perpendiculaire abaissée du point $e'$ sur $fq'$. Ces deux directrices se coupent en $g$, et, d'après ce que nous avons dit plus haut, la droite $gl$ est la tangente cherchée. Nous allons simplifier cette construction. Des points $a$, $a'$ menons les droites $ah$, $a'h$ parallèlement à $fq$, $fq'$; nous obtenons ainsi un triangle $aa'h$ semblable au triangle $ee'g$ : puisque ses côtés sont perpendiculaires aux côtés de ce dernier. De même, le quadrilatère $aba'h$ est semblable à $ele'g$; la droite $bh$ est donc perpendiculaire à la tangente $lg$. De là résulte la construction suivante :

2. *Des centres de courbure* c, c', *on abaisse sur* aa' *les perpendiculaires* cp, c'p', *des points* p, p', *on abaisse sur* ac, a'c', *les perpendiculaires* pq, p'q'; *on joint le*

(*) Dans l'*Analyse des infiniments petits*, le marquis de l'Hopital a incomplètement traité le même problême.

*point f aux points* q, q'; *on mène, parallèlement à ces droites, les lignes* ah, a'h *qui se coupent en* h: *en abaissant, du point* l *une perpendiculaire sur* bh, *on a la tangente cherchée.*

3. Pour déduire, de cette construction, une relation métrique, menons, par le point $h$, la droite $ss'$ parallèle à $aa'$.

On a

$$\frac{sb}{sh}=\frac{\sin.\,shb}{\sin.\,hbs}\,,\qquad \frac{s'b}{s'h}=\frac{\sin.\,bhs'}{\sin.\,s'bh}\,;$$

d'où en posant

$$hbs=\alpha\,,\qquad s'bh=\alpha'\,:\qquad \frac{sb}{s'b}\times\frac{s'h}{sh}=\frac{\sin.\,\alpha'}{\sin.\,\alpha}$$

ou

$$\frac{sa}{s'a'}\times\frac{s'h}{sh}=\frac{\sin.\,\alpha'}{\sin.\,\alpha}\,,\qquad\text{mais}\qquad \frac{sa}{sh}=\frac{aq}{af}\,,\quad \frac{s'a'}{s'h}=\frac{a'q'}{a'f}\,;$$

donc enfin

$$(a)\qquad \frac{\dfrac{aq}{af}}{\dfrac{a'q'}{a'f}}=\frac{\sin.\,\alpha'}{\sin.\,\alpha}\,.$$

4. Lorsque la droite $aa'$ est parallèle à une direction donnée, le point $f$ est à l'infini et la relation $(a)$ devient :

$$(b)\qquad \frac{aq}{a'q'}=\frac{\sin.\,\alpha'}{\sin.\,\alpha}\,.$$

D'après cela, on construira facilement la tangente $lg$ dans ce cas particulier. Nous donnerons plus loin cette construction comme conséquence d'une construction générale que nous allons trouver directement par la méthode infinitésimale.

2$^{\text{eme}}$ Solution. Nous avons supposé que la transversale tourne autour du point fixe $f$; mais tout ce que nous avons dit s'applique au cas où l'on considère une courbe D à laquelle la droite $aa'$ est constamment tangente. Nous allons exposer notre deuxième solution en faisant cette nouvelle hypothèse.

5. *Lemme. Soit une droite* af, (Fig. 1), *tangente à une courbe* D, *et coupant en* a *une courbe* A ; *si l'on appelle* $d\omega$ *et* $d\psi$ *les angles de contingence des courbes* A *et* D *aux points* a *et* f, *on a* $\dfrac{d\omega}{d\psi}=\dfrac{ai}{ac}$; *et, en appelant* $d\sigma$ *un élément de* A, $d\sigma=ai\times d\psi$.

Nous laissons de côté la démonstration qui est très simple.

6. D'après ce lemme l'on a, en considérant les courbes A, D: $\dfrac{d\omega}{d\psi}=\dfrac{ai}{ac}$;

de même, A', D donnent : $\frac{d\omega'}{d\psi}=\frac{a'i'}{a'c'}$; donc $\frac{d\omega}{d\omega'}=\frac{ai}{ac}\times\frac{a'c'}{a'i'}$.

Cette relation, qu'on peut écrire ainsi : $\frac{d\sigma}{d\sigma'}=\frac{ai}{a'l'}$ (*), exprime le théorème suivant:

*Les arcs infiniments petits, déterminés sur deux courbes fixes* A, A', *par deux positions successives d'une droite telle que* aa', *constamment tangente à une courbe* D, *sont entre eux comme les normales* ai, a'i' *à* A, A', *limitées a la perpendiculaire à* aa', *menée par le point où celle-ci touche* D.

7. En appellant $d\varphi$ l'angle de contingence en $l$ à la courbe $L$, lieu du point $l$, et $r$ le centre de courbure de cette courbe situé sur la normale $lj$, l'on a

$$\frac{d\varphi}{d\omega}=\frac{lj}{lr}.$$

De même, A' et L donnent

$$\frac{d\varphi}{d\omega'}=\frac{lj'}{lr}; \qquad \text{donc} \qquad \frac{d\omega}{d\omega'}=\frac{lj'}{lj}.$$

Cette relation exprime le théorème suivant :

*Les angles de contingence, aux points* a, a' *où deux courbes* A, A' *sont touchées par les tangentes* la, la' *issues d'un point* l *d'une courbe* L, *sont en raison inverse des portions* lj, lj' *de la normale de* L, *comprises entre le point* l *et les points où cette droite est coupée par les normales* aj, a'j' *aux courbes* A, A'.

8. En égalant entre elles les valeurs de $\frac{d\omega}{d\omega'}$ trouvées plus haut il vient :

$$\frac{ai\times a'c'}{ac\times a'i'}=\frac{lj'}{lj},$$

mais

$$lj=\frac{al}{\sin\alpha}, \quad lj'=\frac{a'l}{\sin\alpha'}, \quad ai=\frac{af}{\cos\beta}, \quad a'i'=\frac{a'f}{\cos\beta'},$$

on a donc en substituant :

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{ac\times a'f\times\cos^2\beta}{a'c'\times af\times\cos^2\beta'},$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{\frac{aq}{af}}{\frac{a'q'}{a'f}}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation ($a$).

(*) On a aussi $\frac{d\sigma}{d\sigma'}=\frac{al\times af}{a'l\times a'f}$.

9. Cherchons directement, au moyen de cette relation, la direction de la tangente $lg$. Du point $a'$ menons à $aq$ la parallèle $a'u$; les triangles $qaf$, $a'fu$ donnent :

$$\frac{a'u}{a'f} = \frac{aq}{af},$$

d'où

$$a'u = \frac{\frac{aq}{af}}{\frac{1}{a'f}},$$

et par suite

$$\frac{a'u}{a'q'} = \frac{\frac{aq}{af}}{\frac{a'q'}{a'f}} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha_*};$$

l'on voit donc que la ligne $uq'$ est parallèle à $bh$ (*); de là résulte la construction suivante :

*On détermine les points* q, q' *comme précédemment; du point* a' *on mène à* aq *la parallèle* a'u, *cette droite coupe* qf *en* u : *la ligne* uq' *est perpendiculaire à la tangente cherchée.*

10. Lorsque le point $f$ est à l'infini sur $aa'$, la droite $qf$ est alors $qv$ menée parallèlement à $aa'$ et la tangente cherchée est perpendiculaire à $q'v$. Dire que le point $f$ est à l'infini sur $aa'$, c'est supposer cette droite parallèle à une direction donnée; on a donc, dans ce cas, la construction suivante :

*On détermine les points* q, q' *comme précédemment; on mène, par le point* q, *la droite* qv *parallèlement à la direction donnée; cette ligne coupe* a'v, *menée du point* a' *parallèlement à* aq, *en un point* v : *la droite* q'v *est perpendiculaire à la tangente cherchée.*

11. Reprenons la construction 9; menons $fn$ parallèlement à $uq'$, cette droite coupe $qq'$ en $n$, on a

$$\frac{qn}{nq'} = \frac{qf}{fu} = \frac{af}{fa'};$$

$fn$ étant parallèle à $uq'$ est perpendiculaire à la tangente cherchée, on peut donc dire :

*On détermine les points* q, q' *comme précédemment; on cherche un point* n *qui divise* qq' *comme* f *divise* aa'; *la ligne* nf *est perpendiculaire à la tangente cherchée.*

(*) Cela peut évidemment se démontrer sans passer par l'intermédiaire de la relation ($a$).

12. Nous avons, jusqu'à présent cherché la tangente à la courbe L; il est bien évident, que si L, A, A' sont connues, on peut déterminer $f$. Il suffit pour cela d'inverser la construction 9. On peut aussi se donner L, A et son centre de courbure $c$, $f$, et chercher le centre de courbure $c'$ de A'.

Proposons nous, par exemple, le problème suivant :

13. *On demande de construire le centre de courbure, de la courbe que l'on obtient en divisant dans un rapport constant* m, *les ordonnées d'une courbe donnée.*

Dans ce cas L est l'axe des abscisses et la droite $aa'$ lui est toujours perpendiculaire. D'après cela, les points $q$, $q'$, $v$ de la construction 10, sont en ligne droite et l'on construit $c'$ de la manière suivante :

*On détermine* q *et l'on mène* qq' *parallèlement à* aa' ; *cette droite coupe la perpendiculaire* a'q', *élevée sur* a'l, *au point* q'; *on revient de ce point au centre de courbure cherché.*

*Solution directe.* Remplaçons en $a$ la courbe A par une parabole osculatrice ayant pour axe une droite parallèle à $aa'$. On trouve évidemment $qq'$ pour l'axe de cette parabole. En divisant ses ordonnées dans le rapport constant $m$, on obtient une parabole ayant même axe que la première et osculatrice de A'. (*) Connaissant l'axe $qq'$ de cette parabole, on a $q'$ et par suite $c'$.

En appliquant la relation ($b$), on trouve que

$$(c) \qquad \frac{\frac{ac}{\overline{al}^3}}{\frac{a'c'}{\overline{a'l}^3}} = \frac{1}{m}. \quad (^{**})$$

14. Nous avons supposé les ordonnées perpendiculaires à L, la construction 10 s'applique évidemment au cas ou elles sont obliques. On a aussi la relation ($c$).

Si l'on suppose $m = 1$, les ordonnées étant obliques, on a

$$\frac{ac}{\overline{al}^3} = \frac{a'c'}{\overline{a'l}^3},$$

on voit donc que :

*Pour deux points correspondants* a, a', *les rayons de courbure sont entre eux comme les cubes des tangentes* al, a'l.

---

(*) On sait, en effet, que lorsqu'une méthode de transformation est telle qu'à un point d'une courbe correspond un point de sa transformée, elle donne lieu, pour deux courbes osculatrices, a deux courbes qui sont aussi osculatrices.

(**) Voir : *des Méthodes en Géométrie* par Mr. P. Serret: pag. 96.

De la relation (*b*), on déduit aussi, en supposant toujours $m = 1$, que *les projections de* a q *et de* a'q' *sur* a a' *sont égales.* (*)

Il est facile de voir, que ces deux dernières propriétés sont vraies pour deux points quelconques d'une conique.

15. La construction 10 s'applique aussi au problème suivant :

*Par un point* a, *d'une courbe donnée* A, *on mène une parallèle à l'axe des abscisses; par le pied de l'ordonnée du même point, on mène une parallèle à une direction donnée; ces deux lignes se coupent en* a': *lorsque le point* a *décrit* A, a' *décrit* A', *dont on demande de construire le centre de courbure.*

Les deux propriétés énoncées au n.º 14 sont encore vraies pour les points correspondants $a$, $a'$.

16. Nous ferons remarquer pour terminer qu'on arrive à des propriétés intéressantes, en considérant deux coniques homofocales A, L.

On trouve ainsi la propriété suivante :

*D'un point* l *on mène à une conique les tangentes* la , la' , *on détermine les points* q *et* q' *comme précédemment; les longueurs* aq , a'q' *sont vues du point* l *sous des angles égaux.*

Observation. Nous pensons que les lemmes, qui précèdent ordinairement les recherches de Géométrie infinitésimale, pourraient être mis en ordre et constituer des *Eléments de Géométrie infinitésimale.* C'est dans le but de fournir des matériaux pour la formation de ces éléments que nous avons explicitement énoncé les théorèmes 6 et 7.

Pour compléter ces théorèmes nous ajouterons :

*Pour un mouvement infiniment petit de* aa', *les variations angulaires* $d\lambda$, $d\lambda'$, *des lignes* oa , oa' *que l'on obtient en joignant un point quelconque* o *aux points* a, a', *sont entre elles comme* sin.foa $\times$ sin. loa *est à* sin.foa' $\times$ sin.loa'.

*On peut donner à cette expression de* $\frac{d\lambda}{d\lambda'}$ *des formes très différentes.*

Paris. Juin 1859.

---

(*) Cette propriété peut s'énoncer ainsi :

*Lorsqu'une courbe possède un diamètre rectiligne, les rayons de courbure, correspondant aux extrémités* a, a' *d'une corde conjuguée, sont entre eux comme les cubes des tangentes* al , a'l *issues des points* a, a' *et limitées à leur point de rencontre* l.



# SUR QUELQUES FORMULES POUR LA DIFFÉRENTIATION

PAR M. A. CAYLEY.

(Traduction par l'auteur d'un mémoire présenté à la Société Royale de Londres le 26 Novembre 1857.)

---

En cherchant une formule dans la théorie des intégrales définies multiples je fus conduit il y a plusieurs années à chercher les coefficients différentiels successifs de l'expression $(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$, et les résultats que j'ai trouvés sont donnés dans le Mémoire « On certain formulæ for differentiation with applications to the evaluation of definite integrals, *Camb. an. Dub. Mathematical Journal* tom. II. p. p. 122—128 (1847). J'ai depuis cherché les coefficients différentiels successifs de l'expression plus générale $[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$, mais l'investigation n'était pas achevée. Mon attention fut rappellée à ce sujet par deux identités remarquables trouvées par le Prof. Donkin dans son Mémoire « On the equation of Laplaces functions etc. » *Phil. Trans.* t. 147 (1857) p. p. 43, 57, au moyen de la comparaison de ses résultats avec ceux du Prof. Boole; identités qui appartenaient, je l'apperçus, à la classe des formules ci-dessus mentionnées: la première de ces deux identités se déduit en effet assez facilement d'une formule exposée dans mon mémoire; la démonstration de la seconde identité est beaucoup plus difficile, et je n'ai réussi à l'établir qu'en la faisant dépendre de l'établissement de l'égalité des coefficients numériques de deux expressions de la même forme. Je suis depuis revenu aux investigations incomplétes dont j'ai parlé ci-dessus et les résultats que j'ai trouvés sont donnés dans le présent mémoire. Je remarque qu'en écrivant pour abréger

$$P=2x+\lambda+\mu\,,\quad Q=\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}\,,\quad R=(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^2$$

le sujet auquel appartienent tous les résultats est la différentiation de l'expression $P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ : l'expression ci-dessus mentionnée $[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$ est de la forme dont il s'agit, et la question qui s'y rapporte est celle d'obtenir le développement de $D_x^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, ou $\alpha=0$.

La question suggérée par la seconde identité du Prof. Donkin est celle d'obtenir le développement de $(P^{-1}Q^4 D_x)^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, ou $\alpha=\gamma-\beta$. Comme la démonstration de ces identités est l'un des objets de ce Mémoire, j'ai donné dans la première section la réduction des identités à la forme sous laquelle je les ai depuis considérées. La seconde section se rapporte au développement de l'expression $D_x^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ ou $\alpha=0$ ; la troisième section à celui de l'expression $(P^{-1}Q^4 D_x)^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ où $\alpha=\gamma-\beta$ : enfin la quatrième section contient l'application des deux identités, et quelques autres applications des formules.

## §. I.

1. La première des deux identités du Prof. Donkin est

$$(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n (\tang \tfrac{1}{2}\theta)^n = 1.\,3.\,5\,\ldots\,(2n-1)(\sin\theta)^{2n}$$

la quelle est l'équation (27) article n.° 14. de son Mémoire. (*)

En écrivant $\cot\theta = t$, l'équation devient

$$(-)^n D_t^n \frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^n}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1.\,3.\,5\ldots(2n-1)}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

et en posant comme à l'ordinaire $i=\sqrt{-1}$ on obtient

$$\sqrt{1+t^2}-t = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^2$$

et en écrivant aussi

$$1.\,3.\,5\ldots(2n-1) = 2^n.\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2}) = 2^n\left[n-\tfrac{1}{2}\right]^n$$

la formule devient

$$D_t^n \frac{(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2^n\left[n-\frac{1}{2}\right]^n}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ce qui est un cas particulier de

$$D_x^n \frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n}}{\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}} = \frac{(-)^n(R-\mu)^{2n}\left[n-\frac{1}{2}\right]^n}{\left[(x+\lambda)(x+\mu)\right]^{n+\frac{1}{2}}}$$

ou, en écrivant comme auparavant

$$P = 2x+\lambda+\mu\,,\quad Q=\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}\,,\quad R=\left[\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu}\right]^2$$

la formule est

$$D_x^n\, Q^{-1}\, R^n = (-)^n (\lambda-\mu)^{2n}\left[n-\tfrac{1}{2}\right] Q^{-2n-1}.$$

2. (**) La comparaison mentionnée article N.° 5 du Mémoire du Prof. Donkin donne

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n\left\{f\left[e^{\varphi\sqrt{-1}}\tang\tfrac{1}{2}\theta + F\left(\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}}{\tang\frac{1}{2}\theta}\right)\right]\right\}$$

$$= \mu'^n\left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^n\left\{(\mu+\mu^2)^n f\left(\frac{\mu}{1+\mu}\ \frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\ e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\right.$$

$$\left. + (-)^n(\mu-\mu^2)^n F\left(\frac{\mu}{1-\mu}\ \frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\ e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}$$

---

(*) Vedi la nota in fine.

(**) Le lecteur pourrait omettre cet article qui ne fait que montrer, qu'une certaine formule du Prof. Donkin se reduit a son identité seconde.

ou $\mu = \cos\theta$, et après les différentiations $\mu' = \cos\theta$. Les parties qui contiennent les fonctions indéterminées $f$ et F doivent être égales, chacune prise à part de l'autre. Les parties qui contiennent $f$ seront égales, si cette égalité subsiste pour $fx = x^s$, où $s$ est un indice quelconque; c'est-à-dire l'égalité subsistera si

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n(\tang \tfrac{1}{2}\theta)^s$$

$$= \mu^n\left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^n(\mu + \mu^2)^n \frac{\mu^s}{(1+\mu)^s}\left(\frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\right)^s$$

$$= \mu^n\left(\frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\right)^s\left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^n(\mu + \mu^2)^n \frac{\mu^s}{(1+\mu)^s}$$

ou enfin en écrivant $\mu$, au lieu de $\mu'$, si

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n(\tang \tfrac{1}{2}\theta)^s = \mu^{n-s}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^n \mu^{n+s}(1+\mu)^{n-s}$$

où $\mu = \cos\theta$; c'est en effet la seconde des deux identités du Prof. Donkin. L'égalité des parties, qui contiennent F dépend de la même manière de l'équation

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n(\tang \tfrac{1}{2}\theta)^s = (-)^n(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^2 \mu^{n+s}(1-\mu)^{n-s}$$

laquelle se déduit de l'autre équation en y écrivant $180° - \theta$ au lieu de $\theta$.

3. La seconde identité (Voir article N.° 16) est

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n(\tang \tfrac{1}{2}\theta)^s = \mu^{n-s}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^n \mu^{n+s}(1+\mu)^{n-s}$$

où comme auparavant $\mu = \cos\theta$. En écrivant $\cot\theta = t$, et en faisant attention, que le côté gauche de l'équation peut s'écrire sous la forme

$$(\sin\theta)^{-n-1}(\sin^2\theta\, D_\theta)^n \sin\theta(\tang \tfrac{1}{2}\theta)^n$$

et que l'on a

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \tang \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{1+t^2} - t,\quad \sin^2\theta\, D_\theta = -D_t$$

le côté gauche devient

$$(-)^n(1+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} D_t^n \frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^s}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Le côté droit peut s'écrire sous la forme

$$\mu^{n-s+1}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(\frac{1}{\mu} D_\mu\right)^n \mu^{n+s-1}(1+\mu)^{n+s}.$$

et en observant que

$$\mu = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,, \quad \frac{1}{\mu}\,D_\mu = \frac{(1+t^2)^2}{t}\,D_t$$

le côté droit devient

$$\frac{t^{n-s+1}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\left(\frac{(1+t^2)^2}{t}\,D_t\right)^2 \frac{t^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}-t)^{n-s}}$$

et en comparant les deux expressions on obtient

$$(-)^n\,\frac{(1+t^2)^{n+1}}{t^{n-s+1}}\,D_t^n\,\frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^s}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\left(\frac{(1+t^2)^2}{t}\,D_t\right)^n \frac{t^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}-t)^{n-s}}$$

et de là en écrivant comme auparavant $i=\sqrt{-1}$, et

$$\sqrt{1+t^2}-t = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^2$$

la formule devient

$$\left(\frac{(1+t^2)^2}{2t}\,D_t\right)^n \frac{(2t)^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^{2n-2s}}$$

$$=\frac{(1+t^2)^{n+1}}{(2t)^{n-s+1}}\;D_t^n\;\frac{(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^{2s}}{\sqrt{1+t^2}}$$

laquelle est un cas particulier de

$$\left[\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^2}{2x+\lambda+\mu}\,D_x\right]^n \frac{(2x+\lambda+\mu)^{n+s-1}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n-\frac{1}{2}}\,(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n-2s}}$$

$$=\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+1}}{(2x+\lambda+\mu)^{n-s+1}}\,D_x^n\,\frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2s}}{\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}}$$

c'est-à-dire de

$$(P^{-1}\,Q^4\,D_x)^n(P^{n+s-1}\,Q^{-2n+1}\,R^{-n+s}) = P^{-n+s-1}\,Q^{2n+2}\,D_x^n\,(Q^{-1}\,R^s)$$

## §. II.

4. En écrivant comme auparavant

$$P = 2x+\lambda+\mu\,, \quad Q=\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}\,, \quad R=(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^2.$$

On a $R = P - 2Q$, et en écrivant pour abréger

$$(\lambda - \mu)^2 = \Lambda$$

On obtient aussi

$$\Lambda = P^2 - 4Q^2\,, \qquad \frac{\Lambda}{R} = P + 2Q\,.$$

On trouve de plus

$$D_x P = 2\,, \quad D_x Q = \frac{1}{2}\,\frac{P}{Q}, \quad D_x R = -\frac{R}{Q}.$$

5. Les dernières formules donnent

$$D_x P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^{\alpha+1} Q^{\beta-2} R^\gamma - \gamma P^\alpha Q^{\beta-1} R^\gamma + 2\alpha P^{\alpha-1} Q^\beta R^\gamma$$

formule dont on pourrait se servir pour chercher $D_x^r P^\alpha Q^\beta R^\gamma$; on a par exemple

$$D_x^2 P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{4}\beta(\beta - 2)P^{\alpha+2} Q^{\beta-4} R^\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma(2\beta - 1)P^{\alpha+1} Q^{\beta-3} R^\gamma$$
$$+ \left[\beta(2\alpha + 1) + \gamma^2\right] P^\alpha Q^{\beta-2} R^\gamma - 4\alpha\gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta-1} R^\gamma + 4(\alpha-1)\gamma P^{\alpha-2} Q^\beta R^\gamma$$

et ainsi de suite. Et de même

$$P^{-1} Q^4 D_x . P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^\alpha Q^{\beta+2} R^\gamma - \gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta+3} R^\gamma + 2\alpha P^{\alpha-2} Q^{\beta+4} R^\gamma$$

et de là

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^2 P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{4}\beta(\beta + 2).\, P^\alpha Q^{\beta+4} R^\gamma - \tfrac{1}{2}(2\beta+3)\gamma.\, P^{\alpha-1} Q^{\beta+5} R^\gamma$$
$$+ \left[2\alpha(\beta + 2) + \gamma^2\right].\, P^{\alpha-2} Q^{\beta+6} R^\gamma - 2(2\alpha - 1)\gamma.\, P^{\alpha-3} Q^{\beta+7} R^\gamma$$
$$+ 4\alpha(\alpha - 2).\, P^{\alpha-4} Q^{\beta+8} R^\gamma$$

et ainsi de suite. Mais il serait difficile d'obtenir de cette manière l'expression de la $r^{ieme}$ répétition de l'opération $D_x$, ou $P^{-1} Q^4 D_x$ sur $P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ et je ne poursuis pas la question.

6. Je vais à présent chercher le développement de $D_x^r . P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ $(\alpha = 0)$ ou ce qui est la même chose $D_x^r Q^\beta R^\gamma$. On a

$$D_x Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P Q^{\beta-2} R^\gamma - \gamma Q^{\beta-1} R^\gamma.$$

Ou en substituant pour P la valeur

$$P = \frac{\Lambda}{R} - 2Q$$

on a

$$D_x Q^\beta R^\gamma = -(\beta + \gamma) Q^{\beta-1} R^\gamma - \tfrac{1}{2}\beta \Lambda Q^{\beta-2} R^{\gamma-1}.$$

La répétition de l'opération $D_x$ donne évidemment une expression de la forme

$$D_x^r \cdot Q^\beta R^\gamma = (-)^r L_r, \quad o \quad Q^{\beta-r} R^\gamma$$

$$\vdots$$

$$+ (-)^{r-\theta} \frac{1}{2^\theta} L_{r,\theta} A^\theta Q^{\beta-r-\theta} R^{\gamma-\theta}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{2^r} L_{r,\mu r} \cdot A^r Q^{\beta-2r} R^{\gamma-r}$$

et on obtient pour $L_{r,\theta}$ l'équation aux différences

$$L_{r+1,\theta+1} - (\beta + \gamma - r - 2\theta - 2) L_{r,\theta+1} - (\beta - r - \theta) L_{r,\theta} = 0$$

laquelle, avec les conditions particulières

$$L_{r,-1} = 0 , \quad L_{r,r+1} = 0 , \quad L_{0,0} = 1$$

suffit pour déterminer les coéfficients $L_{r,\theta}$ de la formule.

7. Avant d'aller plus loin, je vais considérer le cas particulier $\beta = 0$. L'équation aux différences est ici

$$L_{r+1,\theta+1} - (\gamma - r - 2\theta - 2) L_{r,\theta+1} + (r + \theta) L_{r,\theta} = 0.$$

Et l'on satisfait à cette équation en posant

$$L_{r,\theta} = \frac{(-)^\theta [r + \theta - 1]^{2\theta} [\gamma - \theta - 1]^{r-\theta-1}}{2^\theta [\theta]^\theta}$$

ou ce qui est la même chose

$$L_{r,\theta} = \frac{(-)^\theta \, 2^\theta \gamma [\theta - \tfrac{1}{2}]^\theta [r + \theta - 1]^{r-\theta-1} [\gamma - \theta - 1]^{r-\theta-1}}{[r - \theta - 1]^{r-\theta-1}} .$$

En effet on déduit de la première expression

$$L_{r+1,\theta+1} - (\gamma - r - 2\theta - 2) L_{r,\theta+1}$$

$$= \frac{(-)^{\theta+1}\gamma}{2^{\theta+1} [\theta + 1]^{\theta+1}} (r + \theta) [r + \theta - 1]^{2\theta} [\gamma - \theta - 2]^{r-\theta-2} \times$$

$$[ (r + \theta + 1)(\gamma - r) - (\gamma - r - 2\theta - 2)(r - \theta - 1)]$$

et le facteur en [ ] est $2(\theta + 1)(\gamma - \theta - 1)$, de manière, que l'expression devient

*

$$= \frac{-(-)^\theta \gamma}{2^\theta [\theta]^\theta} (r+\theta) [r+\theta-1]^{2\theta} [\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}$$

ce qui est

$$= -(r+\theta) L_{r,\theta}.$$

L'équation aux différences est donc satisfaite; les conditions pour les limites sont aussi satisfaites, et la valeur qui vient d'être donnée est donc celle de $L_{r,\theta}$ dans le cas particulier dont il s'agit où $\beta = 0$.

8. Il sera convenable d'écrire

$$\frac{(-)^\theta}{2^\theta \gamma} L_{r,\theta} = \frac{[r+\theta-1]^{2\theta} [\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{2^{2\theta} [\theta]^\theta}$$

$$= \frac{[\theta-\frac{1}{2}]^\theta [r+\theta-1]^{r-\theta-1} [\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{[r-\theta-1]^{r-\theta-1}} = L'_{r,\theta}.$$

Et alors en observant que $L_{r,\theta}$, ou $L'_{r,\theta}$ se réduit à zéro pour $\theta = r$, on obtient

$$\frac{(-)^r}{\gamma} D_x^r R^\gamma = L'_{r,0} Q^{-r} R^\gamma \ldots + L'_{r,\theta} \Lambda^\theta Q^{-r-\theta} R^{\gamma-\theta} \ldots + L'_{r,r-1} \Lambda^{r-1} Q^{-2r+1} R^{\gamma-r-1}.$$

9. Cela est en effet sous une forme un peu modifiée la formule fondamentale de mon mémoire dans le *Camb. an Dub. Math. Journal*; la valeur qu'on y trouve du coefficient $K_{r,\theta}$ (en mettant $\gamma$ au lieu de $i$ est)

$$K_{r,\theta} = \frac{\Gamma(r-\frac{1}{2}-\theta)\Gamma(2r-1-\theta)\Gamma(\gamma-r-\theta-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\theta+1)\Gamma(2r-1-2\theta)\Gamma(\gamma-r+1)}$$

et le coefficient $L_{r,\theta}$ ($\beta = 0$) du présent mémoire est lié avec $K_{r,\theta}$ par l'équation

$$\frac{(-)^\theta}{2^\theta \gamma} L_{r,\theta} = L'_{r,\theta} = K_{r,r-1-\theta}.$$

La valeur de $L'_{r,r-1}$ est $[r-\frac{3}{2}]^{r-1}$, et pour $r = \gamma + 1$ le coefficient devient $[\gamma-\frac{1}{2}]^\gamma$, et tous les autres coefficients se réduissent à zéro : la formule devient donc tout simplement

$$\frac{(-)^{\gamma+1}}{\gamma} D_x^{\gamma+1} R^\gamma = [\gamma-\tfrac{1}{2}]^\gamma \Lambda^\gamma Q^{-2\gamma-1}.$$

10. Dans le cas $r > \gamma + 1$ il convient de modifier la forme de l'équation. J'écris $r = \gamma + 1 + s$, puis en faisant attention que les coefficiens $L'_{\gamma+1+s,\theta}$ se réduisent à zéro pour $\theta < \gamma$, on peut écrire $\gamma + \theta$ au lieu de $\theta$, et dans la formule nouvelle étendre $\theta$ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = s$. On a ainsi

$$\frac{(-)^{\gamma+1+s}}{\gamma} D_x^{\gamma+1+s} R^\gamma = L'_{\gamma+1+s,\gamma} \Lambda^\gamma Q^{-2\gamma-1-s} R^0$$
$$\vdots$$
$$+ L'_{\gamma+1+s,\gamma+\theta} \Lambda^{\gamma+\theta} Q^{-2\gamma-1-s-\theta} R^{-\theta}$$
$$\vdots$$
$$+ L'_{\gamma+1+s,\gamma+s} \Lambda^{\gamma+s} Q^{-2\gamma-1-2s} R^{-s}$$

et dans cette équation le côté gauche peut s'exprimer sous la forme

$$L'_{\gamma+1,\gamma} \Lambda^\gamma (-)^s D_x^s Q^{-2\gamma-1}.$$

On obtient ainsi

$$D_x^s Q^{-2\gamma-1} = L''_{s,0} Q^{-2\gamma-1-s}$$
$$\vdots$$
$$+ L''_{s,\theta} \Lambda^\theta Q^{-2\gamma-1-s-\theta} R^{-\theta}$$
$$\vdots$$
$$+ L''_{s,s} \Lambda^s Q^{-2\gamma-1-2s} R^{-s}$$

où

$$L''_{s,\theta} = (-)^s L'_{\gamma+1+s,\gamma+\theta} - L'_{\gamma+1,\gamma},$$

et en substituant pour les coefficients $L'$ leurs valeurs et en faisant attention que

$$[-\theta-1]^{s-\theta} = (-)^{s-\theta} [s]^{s-\theta}$$

on trouve

$$L''_{s,\theta} = \frac{(-)^\theta [2\gamma+s+\theta]^{2\gamma+2\theta} [s]^{s-\theta}}{2^{2\theta} [2\gamma]^{2\theta} [\gamma+\theta]^\theta} = \frac{(-)^\theta [\gamma+\theta-\frac{1}{2}]^\theta [2\gamma+s+\theta]^{s-\theta} [s]^{s-\theta}}{[s-\theta]^{s-\theta}}.$$

La formule qui vient d'être trouvée est donnée sous une forme différente dans mon mémoire dejà cité.

11. Je résume l'équation générale

$$L_{r+1,\theta+1} - (\beta+\gamma-r-2\theta-2) L_{r,\theta+1} - (\beta-r-\theta) L_{r,\theta} = 0$$

les conditions aux limites étant comme auparavant

$$L_{r,-1} = 0, \quad L_{r,r+1} = 0, \quad L_{0,0} = 1.$$

On a en particulier

$$L_{r+1,0} - (\beta+\gamma-r) L_{r,0} = 0$$
$$L_{r+1,1} - (\beta+\gamma-r-2) L_{r,1} - (\beta-r) L_{r,0} = 0$$
$$L_{r+1,2} - (\beta+\gamma-r-4) L_{r,2} - (\beta-r-1) L_{r,1} = 0$$
$$\vdots$$
$$L_{r+1,r+1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - (\beta-2r) L_{r,r} = 0.$$

De là on voit tout de suite que les valeurs de $L_{r,0}$, $L_{r,r}$ sont

$$L_{r,0} = [\beta + \gamma]^r, \qquad L_{r,r} = [\beta, \ -2]^r$$

où dans la dernière équation la notation au côté droit dénote une factorielle à différence $-2$.

12. Les autres coefficiens $L_{r,1}$ $L_{r,2}$ etc. peuvent s'obtenir successivement par une intégration directe des équations; et quoiqu'on ne les obtienne pas de cette manière sous la forme la plus commode, cependant il convient de donner l'investigation. Pour trouver $L_{r,1}$ on peut écrire

$$L_{r,1} = [\beta + \gamma - 2]^r M_{r,1}$$

l'équation pour $M_{r,1}$ sera

$$M_{r+1,1} - M_{r,1} = \frac{(\beta - r)[\beta+\gamma]^r}{[\beta+\gamma-2]^{r+1}} = \frac{(\beta - r)(\beta + \gamma)(\beta + \gamma - 1)}{(\beta + \gamma - r)(\beta + \gamma - r - 1)(\beta + \gamma - r - 2)}$$

la quelle peut aussi s'écrire

$$M_{r+1,1} - M_{r,1} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}(r+2)(r+1)(\gamma-2)}{\beta + \gamma - r - 2} + \frac{(r+1)r(\gamma-1)}{\beta+\gamma-r-1} + \frac{-\frac{1}{2}r(r-1)\gamma}{\beta + \gamma - r}.$$

Cette équation a une solution

$$M_{r,1} = r + \frac{A_r}{\beta + \gamma - r - 1} + \frac{B_r}{\beta + \gamma - r}$$

cela donne en effet

$$M_{r+1,1} - M_{r,1} = 1 + \frac{A_{r+1}}{\beta + \gamma - r - 2} + \frac{B_{r+1} - A_r}{\beta + \gamma - r - 1} + \frac{-B_r}{\beta + \gamma - r}$$

et l'on doit ainsi avoir

$$A_{r+1} = -\tfrac{1}{2}(r + 2)(r + 1)(\gamma - 2),$$

$$B_{r+1} - A_r = (r + 1)r(\gamma - 1), \qquad -B_r = -\tfrac{1}{2}r(r - 1)\gamma$$

équations qui sont satisfaites par

$$A_r = -\tfrac{1}{2}(r + 1)r(\gamma - 2), \qquad B_r = \tfrac{1}{2}r(r - 1)\gamma.$$

Les conditions aux limites sont aussi satisfaites, et en formant l'expression de $L_{r,1}$ on obtient

$$L_{r,1} = [\beta + \gamma - 2]^r\left(r + \frac{-\frac{1}{2}(r + 1)r(\gamma - 2)}{\beta + \gamma - r - 1} + \frac{\frac{1}{2}r(r - 1)\gamma}{\beta + \gamma - r}\right).$$

13. La valeur de $L_{r,2}$ peut s'obtenir par un procédé semblable, et l'on a

$$L_{r,2} = [\beta+\gamma-4]^r\left(\tfrac{1}{2}r(r-1) + \frac{A_r}{\beta+\gamma-r-3} + \frac{B_r}{\beta+\gamma-r-2} + \frac{C_r}{\beta+\gamma-r-1} + \frac{D_r}{\beta+\gamma-r}\right)$$

où

$$A_r = \frac{1}{48}(r+1)r\Big((r^2+5r-6)\gamma^2+(-11r^2-31r+42)\gamma+(24r^2+48r-72)\Big)$$

$$B_r = -\frac{3}{48}r(r-1)\Big((r^2+3r-2)\gamma^2+(-7r^2-13r+6)\gamma+8r^2+16r\Big)$$

$$C_r = \frac{3}{48}(r-1)(r-2)\Big((r^2+r)\gamma^2+(-3r^2-3r)\gamma\Big)$$

$$D_r = -\frac{1}{48}(r-2)(r-3)\Big((r^2-r)\gamma^2+(r^2-r)\gamma\Big)$$

et l'on peut remarquer que les suites des coefficients numériques (1, 1, 1, 1), (5, 3, 1, —1), (—6, —2, 0, 0) ont respectivement les premières, secondes, et troisièmes différences égales à zéro, les suites (—11, —7, —3, 1), (—31, —13, —3, —1) ont respectivement les secondes, et troisièmes différences égales à zéro, et la suite (24, 8, 0, 0) a les troisièmes différences égales à zéro. Je remarque que pour $r=1$, $r=2$ les expressions de $L_{r,1}$, $L_{r,2}$ donnent

$$L_{1,1} = (\beta+\gamma-2)\left(1-\frac{(\gamma-2)}{\beta+\gamma-2}\right) = \beta$$

$$L_{2,2} = (\beta+\gamma-4)(\beta+\gamma-5)\left(1+\frac{\gamma^2-8\gamma+15}{\beta+\gamma-5}+\frac{-\gamma^2+6\gamma-8}{\beta+\gamma-4}\right) = \beta(\beta-2)$$

les quelles s'accordent avec les résultats donnés par l'expression générale de $L_{r,r}$.

14. L'expression de $L_{r,1}$ peut se transformer en

$$L_{r,1} = r\beta[\beta+\gamma-2]^{r-1} - \tfrac{1}{2}r(r-1)[\beta+\gamma-2]^{r-2}$$

et l'expression de $L_{r,2}$ peut de même avec beaucoup plus de peine se transformer en

$$L_{r,2} = \tfrac{1}{2}r(r-1)\left\{\begin{array}{l} \beta(\beta-2)[\beta+\gamma-4]^{r-2} \\ -(r-2)\gamma(\beta-1)[\beta+\gamma-4]^{r-3} \\ +\tfrac{1}{2}(r-2)(r-3)\,\tfrac{1}{2}(\beta+1)\beta[\beta+\gamma-4]^{r-4} \end{array}\right.$$

et la forme de ces équations et d'autres considérations m'ont conduit à assumer en général

$$L_{r,\theta} = \frac{1}{[\theta]^\theta} A_{\theta,0}[r]^\theta [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-\theta}$$

$$- \frac{1}{[\theta - 1]^{\theta-1}[1]^1} \tfrac{1}{2} A_{\theta,1} [r]^{\theta+1} [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-\theta-1}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(-)^\sigma}{[\theta - \sigma]^{\theta-\sigma} [\sigma]^\sigma} \cdot \frac{1}{2^\sigma} A_{\theta,\sigma} [r]^{\theta+\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-\theta-\sigma}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(-)^\theta}{[\theta]^\theta} A_{\theta,\theta} [r]^{2\theta} [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-2\theta}.$$

15. En posant pour plus de commodité $\theta - 1$ au lieu de $\theta$ dans l'équation aux différences cette équation devient

$$L_{r+1,\theta} - (\beta + \gamma - r - 2\theta) L_{r,\theta} = (\beta - r - \theta + 1) L_{r,\theta-1}$$

et puis substituant dans cette équation la valeur assumée de $L_{r,\theta}$, et les valeurs correspondantes de $L_{r+1,\theta}$ et $L_{r,\theta-1}$.

Le terme général au côté gauche sera

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}} \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-\theta-\sigma} A_{\theta,\sigma}$$

$$\times [\, (r + 1)(\beta + \gamma - r - \theta - \sigma) - (\beta + \gamma - r - 2\theta)(r - \theta - \sigma + 1) \,]$$

l'expression en $[\ ]$ est $(\theta + \sigma)(\beta + \gamma - 2\theta + 1)$, et en substituant cette valeur le terme général au côté gauche devient

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}} \cdot \frac{1}{2^\sigma} (\theta + \sigma) [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r+1-\theta-\sigma} A_{\theta,\sigma}.$$

Le terme général au côté droit est

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}} \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta-1-\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma} A_{\theta-1,\sigma}$$

$$\times (\beta - r - \theta + 1)(\beta + \gamma - 2\theta + 2)$$

dont le dernier facteur est égal à

$$(\beta + \gamma - r - \theta + 1 + \sigma)(\beta - 2\theta + 2 - \sigma) - (r - \theta + 1 - \sigma)(\gamma + \sigma)$$

et en substituant cette valeur le terme devient

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma[\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}} \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta-1+\sigma}[\beta + \gamma - 2\theta - 1]^{r-\theta-\sigma+1} (\beta - 2\theta + 2 - \sigma) A_{\theta-1,\sigma}$$

$$- \frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma[\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}} \cdot \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta+\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma} (\gamma + \sigma) A_{\theta-1,\sigma}.$$

En écrivant dans la seconde ligne (ce qui est permis) $\sigma - 1$, au lieu de $\sigma$ cette ligne devient

$$-\frac{(-)^{\sigma-1}}{[\sigma-1]^{\sigma-1}[\theta-\sigma]^{\theta-\sigma}}\cdot\frac{1}{2^{\sigma-1}}[r]^{\theta+\sigma-1}[\beta+\gamma-2\theta+1]^{r-\theta-\sigma+1}(\gamma+\sigma-1)A_{\theta-1,\sigma-1}$$

et les deux lignes ensemble seront

$$\frac{(-)^{\sigma}}{[\sigma]^{\sigma}[\theta-\sigma]^{\theta-\sigma}}\frac{1}{2^{\sigma}}[r]^{\theta+\sigma-1}[\beta+\gamma-2\theta+1]^{r-\theta-\sigma+1}$$
$$\times\left[(\theta-\sigma)(\beta-2\theta+2-\sigma)A_{\theta-1,\sigma}+2\sigma(\gamma+\sigma-1)A_{\theta-1,\sigma-1}\right].$$

Ce qui est le terme général au côté droit. En comparant cela avec l'expression ci dessus trouvée pour le terme général au côté gauche on obtient

$$(\theta+\sigma)A_{\theta,\sigma}=(\theta-\sigma)(\beta-2\theta+2-\sigma)A_{\theta-1,\sigma}+2\sigma(\gamma+\sigma-1)A_{\theta-1,\sigma-1}$$

pour l'équation aux différences à laquelle doit satisfaire le coefficient $A_{\theta,\sigma}$, en y écrivant

$$A_{\theta,\sigma}=[\gamma+\sigma-1]^{\sigma}B_{\theta,\sigma}$$

on aura pour $B_{\theta,\sigma}$ l'équation

$$(\theta+\sigma)B_{\theta,\sigma}=(\theta-\sigma)(\beta-2\theta+2-\sigma)B_{\theta-1,\sigma}+2\sigma B_{\theta-1,\sigma-1}$$

et on voit sans peine que les conditions aux limites sont

$$B_{\theta,-1}=0,\qquad B_{\theta,\theta+1}=0,\qquad B_{0,0}=1.$$

16. On a en particulier

$$B_{\theta,0}=(\beta-2\theta+2)B_{\theta-1,0},\qquad B_{\theta,\theta}=B_{\theta-1,\theta-1}$$

et de là

$$B_{\theta,0}=[\beta,-2]^{\theta},\qquad B_{\theta,\theta}=1.$$

Les autres fonctions $B_{\theta,\sigma}$ sont des fonctions rationnelles et entières de $\beta$, du degré $\theta-\sigma$, données par l'équation aux différences; mais les coefficients numériques des différentes puissances de $\beta$ n'admettent, à ce qu'il parait, aucune expression simple; les fonctions $B_{\theta,\sigma}$ sont, pour ainsi dire, une espèce de transcendantes rationnelles propres pour exprimer la valeur de $L_{r,\theta}$, et il sera suffisant de tabuler les valeurs de $B_{\theta,\sigma}$ sans pousser plus loin la recherche de la loi de ces valeurs. On a en effet pour $B_{0,0}$, $B_{1,0}$, etc. ... $B_{1,1}$ les valeurs

$$1,\quad\beta,\quad\beta(\beta-2),\quad\beta(\beta-2)(\beta-4),\quad\beta(\beta-2)(\beta-4)(\beta-6),\ \text{etc.}\ \ldots$$
$$1,\quad\beta-1,\quad\beta^2-4\beta+\frac{5}{2},\quad\beta^3-9\beta^2+\frac{43}{2}\beta-\frac{21}{2}$$
$$1,\quad\beta-2,\quad\beta^2-6\beta+7,$$
$$1\quad\beta-3,$$
$$1$$

17. Puis en substituant pour $\Lambda_{\theta,\sigma}$ la valeur $[\gamma+\sigma-1]^\sigma B_{\theta,\sigma}$ on trouve

$$L_{r,\theta}=\frac{1}{[\theta]^\theta}B_{\theta,0}[r]^\theta[\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta}$$

$$+\frac{(-)}{[\theta-1]^{\theta-1}[1]^1}\frac{1}{2}B_{\theta,1}[\gamma]^1[r]^{\theta+1}[\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-1}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{(-)^\sigma}{[\theta-\sigma]^{\theta-\sigma}[\sigma]^\sigma}\frac{1}{2^\sigma}B_{\theta,\sigma}[\gamma+\sigma-1]^\sigma[r]^{\theta+\sigma}[\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-\sigma}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{(-)^\theta}{[\theta]^\theta}\frac{1}{2^\theta}B_{\theta,\theta}[\gamma+\theta-1]^\theta[r]^{2\theta}[\beta+\gamma-2\theta]^{r-2\theta}.$$

Ce qui est l'expression de $L_{r,\theta}$ dans la formule

$$D_x^r Q^\beta R^\gamma=(-)^{-r}L_{r,0}Q^{\beta-\gamma}R^\gamma$$

$$\vdots$$

$$+(-)^{r-\theta}\frac{1}{2^\theta}L_{r,\theta}\Lambda^\theta Q^{\beta-r-\theta}R^{\gamma-\theta}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2^r}L_{r,r}\Lambda^r Q^{\beta-2r}R^{\gamma-r}.$$

## §. III.

18. Je passe à présent au développement de

$$(P^{-1}Q^4D_x)^r P^\alpha Q^\beta R^\gamma \quad (\alpha=\gamma-\beta)$$

ou ce qui est la même chose

$$(P^{-1}Q^4D_x)^r P^{\gamma-\beta}Q^\beta R^\gamma$$

On a comme auparavant

$$P^{-1}Q^4D_x.P^\alpha Q^\beta R^\gamma=\tfrac{1}{2}\beta P^\alpha Q^{\beta+2}R^\gamma-\gamma P^{\alpha-1}Q^{\beta+3}R^\gamma+2\alpha P^{\alpha-2}Q^{\beta+4}R^\gamma$$

et de là

$$P^{-1}Q^4D_x.P^{\gamma-\beta}Q^\beta R^\gamma=\tfrac{1}{2}\beta P^{\gamma-\beta}Q^{\beta+2}R^\gamma-\gamma P^{\gamma-\beta-1}Q^{\beta+3}R^\gamma+2(\gamma-\beta)P^{\gamma-\beta-2}Q^{\beta+4}R^\gamma$$

$$=\tfrac{1}{2}\beta(P-2Q)P^{\gamma-\beta-1}Q^{\beta+2}R^\gamma-(\gamma-\beta)(P-2Q)P^{\gamma-\beta-2}Q^{\beta+3}R^\gamma$$

c'est-à-dire

$$P^{-1}Q^4D_x P^{\gamma-\beta}Q^\beta R^\gamma=\tfrac{1}{2}\beta P^{\gamma-\beta-1}Q^{\beta+2}R^{\gamma+1}-(\gamma-\beta)P^{\gamma-\beta-2}Q^{\beta+3}R^{\gamma+1}.$$

On peut donc écrire

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^r P^{\gamma-\beta} Q^\beta R^\gamma = \frac{1}{2^r} N_{r,0} P^{\gamma-\beta-r} Q^{\beta+2r} R^{\gamma+r}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(-)^\theta}{2^{r-\theta}} N_{r,\theta} P^{\gamma-\beta-r-\theta} Q^{\beta+2r+\theta} R^{\gamma+r}$$

$$\vdots$$

$$+ (-)^r N_{r,r} P^{\gamma-\beta-2r} Q^{\beta+2r} R^{\gamma+r}$$

et on trouve pour $N_{r,\theta}$ l'équation aux différences

$$N_{r+1,\theta+1} - (\beta + 2r + \theta + 1)N_{r,\theta+1} - (\gamma - \beta - r - \theta)N_{r,\theta} = 0$$

laquelle avec les conditions aux limites

$$N_{r,-1} = 0\ , \qquad N_{r,r+1} = 0\ , \qquad N_{0,0} = 1$$

détermine le coefficient $N_{r,\theta}$.

On a, en particulier

$$N_{r+1,0} = (\beta + 2r)N_{r,0}$$

$$N_{r+1,1} = (\beta + 2r + 1)N_{r,1} + (\gamma - \beta - r)N_{r,0}$$

$$N_{r+1,2} = (\beta + 2r + 2)N_{r,2} + (\gamma - \beta - r - 1)N_{r,1}$$

$$\vdots$$

$$N_{r+1,r+1} = (\gamma - \beta - 2r)N_{r,r}$$

les quelles donnent tout de suite

$$N_{r,0} = [\beta + 2r - 2, - 2]^r\ , \qquad N_{r,r} = [\gamma - \beta, - 2]^r$$

19. L'équation ressemble à celle pour $L_{r,\theta}$ et l'on pourrait croire que l'intégration s'accomplirait d'une manière semblable, mais cela n'est pas ainsi; car en considérant la seconde équation de la suite, c'est-à-dire

$$N_{r+1,1} - (\beta + 2r + 1)N_{r,1} = (\gamma - \beta - r)\,[\beta + 2r - 2, - 2]^r$$

en y mettant

$$N_{r,1} = [\beta + 2r - 1, - 2]^r\, M_{r,1}$$

en obtient

$$[\beta + 2r + 1, - 2]^{r+1}\, (M_{r+1,1} - M_{r,1}) = (\gamma - \beta - r)\,[\beta + 2r - 2, -2]^r$$

et de là

$$M_{r+1,1} - M_{r,1} = \frac{(\gamma - \beta - r)\,[\beta + 2r - 2, - 2]^r}{[\beta + 2r + 1, - 2]^{r+1}}$$

mais les facteurs du numérateur, et du dénominateur ne sont pas ici (ce qui arrivait dans l'équation pour la quantité dénotée auparavant par le même symbole $M_{r,1}$) de la même forme, et il n'y a pas de simplication dans la forme de la fraction. En écrivant successivement $r-1$, $r-2$, ... 2, 1, 0 pour $r$ on trouve

$$M_{r,1}=\gamma-\beta+\frac{(\gamma-\beta-1)\beta}{\beta+3}+\frac{(\gamma-\beta-2)(\beta+2)\beta}{(\beta+5)(\beta+3)}$$
$$\ldots+\frac{(\gamma-\beta-r+1)(\beta+2r-4)\ldots(\beta+2)\beta}{(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)(\beta+3)}$$

et de là

$$N_{r,1}=(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)(\beta+3)\left(\gamma-\beta+\frac{(\gamma-\beta-1)\beta}{\beta+3}+\frac{(\gamma-\beta-2)(\beta+2)\beta}{(\beta+5)(\beta+3)}\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(\gamma-\beta-r+1)(\beta+2r-4)\ldots(\beta+2)\beta}{(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)(\beta+3)}\right).$$

Il ne parait pas que la suit en [ ] puisse être additionée, et cela mempèche de pousser plus loin la recherche de la forme des coefficients $N_{r,\theta}$; la solution telle que je l'ai trouvée est donc donnée par l'expression de $(P^{-1}Q^4D_x)^r P^{\gamma-\beta}Q^\beta R^\gamma$ en termes des coefficients numériques $N_{r,\theta}$, et par l'équation aux différences et conditions aux limites qui déterminent les coefficients $N_{r,\theta}$.

## §. IV.

20. La première des identités du Prof. Donkin est

$$D_x^n Q^{-1}R^n=(-)^n\Lambda^n\left[n-\tfrac{1}{2}\right]^n Q^{-2n-1}.$$

Mais par une forme ci-dessus trouvée n.º 9 en y écrivant $n$ au lieu de $\gamma$ on a

$$\frac{(-)^{n+1}}{n}D_x^{n+1}R^n=\Lambda^n\left[n-\tfrac{1}{2}\right]^n Q^{-2n-1}$$

et en remarquant que $D_xR^n=-nQ^{-1}R^n$ on voit que les deux formules sont identiques et la verité du théorème est ainsi démontrée.

21. La seconde des deux identités est

$$P^{-n+s-1}Q^{2n+2}D_x^n Q^{-1}R^s=(P^{-1}Q^4D_x)^n P^{n+s-1}Q^{-2n+1}R^{-n+s}.$$

On a par la formule (n.º 10) en y mettant $s$ au lieu de $\gamma$ et $n+1$ au lieu de $r$.

$$\frac{(-)^{n+1}}{s} D_x^{n+1} R^s = L'_{n+1,0} Q^{-n-1} R^s$$
$$\vdots$$
$$+ L'_{n+1,\theta} \Lambda^\theta Q^{-n-1-\theta} R^{s-\theta}$$
$$\vdots$$
$$+ L'_{n+1,n} \Lambda^n Q^{-2n-1} R^{s-n}$$

où

$$L'_{n+1,\theta} = \frac{[\theta - \frac{1}{2}]^\theta [n+\theta]^{n-\theta} [s - \theta - 1]^{n-\theta}}{[n-\theta]^{n-\theta}} .$$

22. En renversant l'ordre des termes et mettant aussi $L'_{n+1,\theta} = V_{n-\theta}$ de manière que

$$V_\theta = \frac{[n - \frac{1}{2} - \theta]^{n-\theta} [2n-\theta]^\theta [s - n + \theta - 1]^\theta}{[\theta]^\theta}$$

on obtient

$$\frac{(-)^{n+1}}{s} D_x^{n+1} R^s = V_0 \Lambda^n Q^{-2n-1} R^{s-n}$$
$$\vdots$$
$$+ V_\theta \Lambda^{n-\theta} Q^{-2n-1+\theta} R^{s-n+\theta}$$
$$\vdots$$
$$+ V_n Q^{-n-1} R^s$$

et en remarquant que $D_x R^s = - sQ^{-1} R^s$, et que l'on a aussi $\Lambda = P^2 - 4Q^2$, et $R = P - 2Q$ de manière que $\Lambda R^{-1} = (P + 2Q)$, l'équation peut s'écrire sous la forme

$$Q^{2n+2} P^{-n+s-1} D_x^n Q^{-1} R = (-)^n \times V_0 (P+2Q)^n P^{-n+s-1} QR^s$$
$$\vdots$$
$$+ V_\theta (P+2Q)^{n-\theta} P^{-n+s-1} Q^{1+\theta} R^s$$
$$\vdots$$
$$+ V_n P^{-n+s-1} Q^{1+n} R^s$$

et en développant les binomiels on obtient

$$Q^{2n+2} P^{-n+s-1} D_x^n Q^{-1} R^s = (-)^n \times (V_0) P^{s-1} QR^s$$
$$+ \left(\frac{[n]^1}{[1]^1} 2^1 V_0 + V_1\right) P^{s-2} Q^2 R^s + \left(\frac{[n]^2}{[2]^2} 2^2 V_0 + \frac{[n-1]^1}{[1]^1} 2^1 V_1 + V_2\right) P^{s-3} Q^3 R^s$$
$$\vdots$$
$$+ (2^n V_0 + 2^{n-1} V_1 \dots + 2^1 V_{n-1} + V_n) P^{s-n-1} Q^{n+1} R^s.$$

Cela devrait être égal à

$$(\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{Q}^4\,\mathrm{D}_x)^n\,\mathrm{P}^{n+s-1}\,\mathrm{Q}^{-2n+1}\,\mathrm{R}^{-n+s}$$

et le développement de cette dernière expression se déduit du celui (n.° 18) de

$$(\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{Q}^4\,\mathrm{D}_x)^r\,\mathrm{P}^{\gamma-\beta}\,\mathrm{Q}^{\gamma}\,\mathrm{R}^{\beta}$$

en y écrivant $n$, $-2n+1$, $-n+s$ au lieu de $r$, $\beta$, $\gamma$; la valeur sera ainsi

$$= \frac{1}{2^n}\mathrm{N}_{n,0}\mathrm{P}^{s-1}\mathrm{Q}\mathrm{R}^s - \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{N}_{n,1}\,\mathrm{P}^{s-2}\,\mathrm{Q}^2\,\mathrm{R}^s$$

$$+ \frac{1}{2^{n-2}}\mathrm{N}_{n,2}\,\mathrm{P}^{s-3}\,\mathrm{Q}^3\mathrm{R}^s\,\ldots + (-)^n\,\mathrm{N}_{n,n}\,\mathrm{P}^{s-n-1}\,\mathrm{Q}^{n+1}\,\mathrm{R}^s$$

ce qui est de la même forme avec le développement de la fonction au côté gauche de l'équation, et l'identité des deux expressions dépend des équations

$$\frac{1}{2^n}\mathrm{N}_{n,0} = (-)^n\,\mathrm{V}_0$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{N}_{n,1} = (-)^{n-1}\left(\frac{[n]^1}{[1]^1}\,2^1\mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1\right)$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}\mathrm{N}_{n,2} = (-)^{n-2}\left(\frac{[n]^2}{[2]^2}\,2^2\mathrm{V}_0 + \frac{[n-1]^1}{[1]^1}\,2^1\,\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{N}_{n,n} = (2^n\,\mathrm{V}_0 + 2^{n-1}\,\mathrm{V}_1\ldots + 2\mathrm{V}_{n-1} + \mathrm{V}_n)\,.$$

Mais comme on ne sait pas la forme générale des coefficients $\mathrm{N}_{n,\theta}$ je n'ai pas pu vérifier complètement ces équations. On a cependant en mettant $n$, $-2n+1$, $-n+s$ pour $r$, $\beta$, $\gamma$

$$\mathrm{N}_{n,0} = [-1,\,+2]^n = (-)^n\,[2n-1,\,-2]^n = (-1)^n\,2^n\,[n-\tfrac{1}{2}]^n$$

$$\mathrm{N}_{n,1} = s[-3,\,+2]^{n-1} = (-)^{n-1}s[2n-1,\,-2]^{n-1} = (-)^{n-1}2^{n-1}s[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1}$$

et les deux premières équations seront

$$[n-\tfrac{1}{2}]^n = [n-\tfrac{1}{2}]^n;\; s[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1} = \tfrac{n}{1}\,2[n-\tfrac{1}{2}]^n + [n-\tfrac{3}{2}]^{n-1}\,(2n-1)(s-n)$$

où dans la seconde équation l'expression au côté droit est

$$[2n+2(s-n)]\,[n-\tfrac{1}{2}]^n = 2s\,[n-\tfrac{1}{2}]^n = s[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1}$$

comme cela devrait être. La dernière équation de la suite est

$$\mathrm{N}_{n,n} = 2^n\mathrm{V}_0 + 2^{n-1}\,\mathrm{V}_1\ldots + 2\mathrm{V}_{n-1} + \mathrm{V}_n$$

et comme on a $\mathrm{N}_{n,n} = [n+s-1,\,-2]^n$, cette dernière équation pourrait aussi se vérifier.

---

## Nota al N.º 1.º del §. I.

(*) Onde meglio riconoscere il passaggio di questa identità del Sig. Prof. Donkin alla formola, che dal Sig. Cayley si riporta col fare $\cot\theta = t$, non sarà inutile di accennare qui una trasformata dell'espressione simbolica

$$(\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta)^n$$

nell'altra

$$(\operatorname{sen}\theta)^{-1}(\operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta)^n \operatorname{sen}\theta$$

qual trasformazione dietro mia richiesta, mi venne gentilmente indicata dal medesimo Sig. Cayley con sua lettera del 8 Agosto scorso: osservo primieramente che con la formola simbolica

$$(\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta)^n$$

s'intende la ripetizione successiva dell'espressione simbolica $\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta$ sopra se stessa: così per $n=2$, si avrebbe

$$\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta$$

la quale secondo le forme consuete si dovrebbe scrivere piuttosto

$$\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \,.\, (\operatorname{sen}\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta)$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \,.\, (\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta),$$

e quindi eseguire l'altra derivazione indicata. Ciò posto sarà facile di riconoscere l'eguaglianza delle due espressioni simboliche

$$(\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta)^n \,, \qquad \text{e} \qquad (\operatorname{sen}\theta)^{-1}(\operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta)^n \operatorname{sen}\theta.$$

Infatti per $n = 2$ si avrebbe dalla prima per una specie di moltiplicazione simbolica

$$\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta = (\operatorname{sen}\theta)^{-1} \operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta \operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta$$

e quindi

$$(\operatorname{sen}\theta\, D_\theta \operatorname{sen}\theta)^2 = (\operatorname{sen}\theta)^{-1} (\operatorname{sen}^2\theta\, D_\theta)^2 \operatorname{sen}\theta$$

e la medesima formola avrà luogo per una potenza qualunque. Facendo ora $\cot\theta = t$ si avrà primieramente $\frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\, dt$; e riportando i simboli di derivazione rispetto a $\theta$, e $t$ ad una medesima funzione si potrà egualmente avere un'equazione simbolica

$$(\operatorname{sen}\theta)^2\, D_\theta = -\, D_t$$

Di qui si trae immediatamente la formola riportata dal Ch. Autore.

B. T.



# DIMOSTRAZIONE DELL'IRREDUTTIBILITA' DELL'EQUAZIONE FORMATA CON LE RADICI PRIMITIVE DELL'UNITA'.

## NOTA

**DEL SIG. V. A. LEBESGUE**
Membro Corrispondente dell' Istituto di Francia,
Professore onorario della facoltà delle Scienze di Bordeaux.

Una radice dell'equazione

$$x^n = 1$$

è detta primitiva quando tutte le sue potenze $\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1}, \rho^n = 1$ sono differenti e compongono la serie compiuta delle radici dell'equazione

$$x^n = 1.$$

Ciò avviene a cagion d'esempio allorchè si prende

$$\rho = \cos \frac{2\pi}{n} + \text{sen} \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \cdot$$

La potenza $\rho^\alpha$ è anch'essa radice primitiva se $\alpha$ è primo ad $n$, ma non è tale nel caso contrario, poichè se $\delta$ divisore di $n$ dividesse anche $\alpha$, si avrebbe allora

$$(\rho^\alpha)^{\frac{n}{\delta}} = 1.$$

Se pongasi

$$n = p^a q^b r^c \ldots.$$

intendendo che i numeri $p, q, r, \ldots.$ siano primi e diversi, e

$$\varphi(n) = p^{a-1}(p-1)q^{b-1}(q-1) \ldots,$$

le radici primitive saranno in numero $\varphi(n)$, e dipenderanno da un'equazione di grado $\varphi(n)$

$$F(x) = 0.$$

La regola per formare il polinomio $F(x)$ avente coefficienti interi è abbastanza nota, e può leggersi negli *Esercizj* del signor Cauchy, anno 1829.

L'irreduttibilità dell'equazione

$$F(x) = 0$$

abbastanza facile a provarsi per

$$n = p \qquad \text{e} \qquad n = p^a,$$

supponendo $p$ numero primo, sembrava molto meno agevole a dedursi nel caso generale. Nel 1854 il signor Kronecker ha data la dimostrazione compiuta nel t. XIX del *Journal de Mathématiques*, facendo uso, per ottenere teoremi più generali, della dottrina de'numeri complessi formati con le radici dell'unità. Poscia il signor Arndt (Giornale di Crelle, t. LVI, p. 178) ha data una dimostrazione più breve. Cercando di chiarire la sua Nota, resa oscura nella sua seconda parte da un errore di stampa che non si scopre immediatamente, ho recata a compimento una dimostrazione incominciata da lungo tempo, che mi pareva divenuta inutile dopo la Memoria del signor Kronecker.

Eccola tuttavia : essa non è altro che una modificazione di quella del signor Arndt, ed è assai facile da seguirsi.

Proposizione I. — Sia

$$F(x) = 0$$

*l'equazione formata con le radici primitive dell'altra equazione*

$$x^n = 1 ,$$

*di più*

$$n = p^a q^b r^c \ldots , \qquad \varphi(n) = p^{a-1} (p-1) q^{b-1} (q-1) \ldots$$

*come fu detto dianzi, e*

$$n = p^a n' :$$

*si avrà, posto* $x'^{n'} = 1$,

$$p = F(x') . G(x') ,$$

*e, per* $n' = 1$ ,

$$p = F(1) ,$$

*indicando con la caratteristica* G *una funzione di* $x$ *avente come* F *i coefficienti interi e che si riduce all'unità per* $n' = 1$.

*Quando* $n$ *contiene più numeri primi differenti, si ha sempre*

$$F(1) = 1.$$

*N. B.* Tralascieremo la dimostrazione di questa ultima parte che non è necessaria per la dimostrazione dell'irreduttibilità.

Proposizione II. — *Se l'equazione*

$$F(x) = 0$$

*è reduttibile, si avrà*

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x).$$

*dove i polinomj irreduttibili* $f_i(x)$ *aventi i coefficienti interi saranno tutti del medesimo grado.*

Proposizione III. — *La proposizione* I *mostra che la risoluzione in fattori supposta nella proposizione* II *è impossibile; donde emerge l'irreduttibilità dell' equazione* F$(x) = 0$, *qualunque sia l'esponente* $n$.

Ecco la dimostrazione della proposizione I.

Si ha

$$(a)\qquad \frac{x^n-1}{x^{\frac{n}{p}}-1} = (x^{\frac{n}{p}})^{p-1} + (x^{\frac{n}{p}})^{p-2} + \ldots + x^{\frac{n}{p}} + 1 = \mathrm{F}(x).\ \mathrm{G}(x).$$

Per $n = p^a$, si vede da quanto precede che

$$\mathrm{G}(x) = 1.$$

Così, fatto $x = 1$, si ha in questo caso

$$p = \mathrm{F}(1).$$

Generalmente, se

$$x'^{n} = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x'^{\frac{n}{p^a}} = 1,$$

ne risulta

$$x'^{\frac{n}{p}} = 1,$$

e per conseguenza l'identità $(a)$ porge

$$p = \mathrm{F}(x').\ \mathrm{G}(x').$$

La dimostrazione delle proposizioni II e III dipende da teoremi assai noti. Se dall'equazione a coefficienti interi

$$f(x) = x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}.x^{m-2} + \ldots + \mathrm{M} = 0,$$

le cui radici sono $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... si passa all'equazione del medesimo grado

$$\mathrm{f}(x') = x'^m + \mathrm{A}_1 x'^{m-1} + \mathrm{B}_1 x'^{m-2} + \ldots + \mathrm{M}_1 = 0,$$

che ha per radici $\alpha^k$, $\beta^k$, $\gamma^k$, ..., supposto $k$ un intero positivo, i coefficienti $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{C}_1$, ... $\mathrm{M}_1$ sono interi. Ciò basta per provare la proposizione II; ma per la proposizione III conviene aggiungere che se $k = p^a$ essendo $p$ un numero primo, i coefficienti $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{C}_1$, ... divengono

$$\mathrm{A} + p\mathrm{A}', \qquad \mathrm{B} + p\mathrm{B}', \qquad \mathrm{C} + p\mathrm{C}', \ldots,$$

ove A$'$, B$'$, C$'$,... si suppongono interi; quindi ponendo $x^{p^a} = x'$, si ha l'identità

$$(b)\qquad f(x') + p\psi(x') = \mathrm{f}(x'),$$

nella quale è da notarsi che $\psi(x')$ è al pari di $f(x')$ una funzione intera con coefficienti interi.

Dimostrazione della proposizione II.

Ammettiamo che si abbia

$$F(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_\nu(x)\,,$$

essendo irreduttibili e dotati di coefficienti interi i diversi fattori $f_i(x)$. Sia

$$f_i(x) = (x - \rho^\alpha)(x - \rho^\beta) \ldots,$$

e

$$f_k(x) = (x - \rho^{\alpha'})(x - \rho^{\beta'}) \ldots.,$$

chiamando $\rho$ una radice primitiva, e $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ numeri primi ad $n$. Se il grado di $f_i(x)$ eccede quello di $f_k(x)$, ponendo

$$\alpha j = hn + \alpha',$$

e passando dall'equazione $f_i(x) = 0$ all'equazione $f_i(x') = 0$, si cambierebbe il polinomio $f_i(x)$ in un altro del medesimo grado avente il fattore $x - \rho^{\alpha'}$, e ne seguirebbe che $f_i(x)$ potrebbe risolversi in fattori, il che contraddice all'ipotesi. Riesce dunque provato che i fattori $f_i(x)$ sono per necessità dello stesso grado.

Dimostrazione della proposizione III.

Se in primo luogo si suppone

$$n = p^a\,,$$

e se abbiasi

$$F(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_\nu(x)\,,$$

si troverà secondo l'equazione ($b$)

$$f_1(x') + p\psi_1(x') = \mathfrak{f}_1(x')\,:$$

ma qui

$$x^{p^a} = 1\,,$$

$\mathfrak{f}_1(x')$ diventa una potenza di $x' - 1$ e si annulla per $x' = 1$: così

$$f_1(1) = -p\psi_1(1)\,:$$

moltiplicando a membro a membro tutte le equazioni simili, e ponendo

$$(-1)^r\, \psi_1(1)\, \psi_2(1) \ldots \psi_\nu(1) = \Psi(1),$$

si avrà l'equazione

$$F(1) = p^\nu . \Psi(1)\,,$$

e però

$$1 = p^{\nu-1}\, \Psi(1)\,,$$

cosa impossibile per essere $\Psi(1)$ intero.

Quando si ha

$$n = p^a q^b\,,$$

l'equazione trasformata

$$\mathfrak{f}_i(x') = 0$$

non ha più tutte le sue radici eguali all'unità; ma poichè per avere

$$(x^{p^a})^m = 1$$

bisogna prendere $m$ moltiplice di $n'(n = p^a . n')$, l'equazione

$$\mathfrak{f}_i(x') = (x' - \rho^{\alpha p^a}) \ldots = 0$$

ha per radici solamente radici primitive di

$$x'^{n'} = 1 \qquad \text{ossia} \qquad x'^{q^b} = 1.$$

Ora l'equazione che dà le radici primitive dell' equazione $x'^{q^b} = 1$ è irreduttibile; convien dunque che l'equazione

$$\mathfrak{f}_i(x') = 0$$

le contenga tutte; quindi rappresentata una di esse con $x'$; si avrà necessariamente, a causa dell'equazione

$$f_i(x') + p\psi_i(x') = \mathfrak{f}_i(x')$$

l'equazione

$$f_i(x') = - p\psi_i(x').$$

La moltiplicazione delle $\nu$ equazioni conformi darà

$$\mathrm{F}(x') = p^\nu \, \Psi(x');$$

ma

$$p = \mathrm{F}(x') . \, \mathrm{G}(x'),$$

onde

$$p = p^\nu \Psi(x') . \, \mathrm{G}(x') = p^\nu \xi(x')$$

ovvero

$$(c) \qquad 1 = p^{\nu - 1} \, \xi(x').$$

Ora l'equazione in $x'$ è irreduttibile e di grado

$$\varphi(q^b) = \lambda \, ,$$

sicchè $\xi(x')$ si reca alla forma

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \, x' + \ldots + \mathrm{A}_{\lambda - 1} \, x'^{\lambda - 1} \, ;$$

dunque l'equazione $(c)$ diventa

$$-1 + p^{\nu-1}(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x' + \ldots + \mathrm{A}_{\lambda-1} \, x'^{\lambda-1}) = 0 \, ,$$

e il primo membro dovrebb'essere identicamente nullo, mentre ciò è impossibile non potendo annullarsi $-1 + p^{\nu-1} \, \mathrm{A}_0$.

Per tanto l'equazione $F(x) = 0$ è irreduttibile per $n = p^a q^b$.

Se ora si fa $n = p^a q^b r^c = p^a n'$, $n' = q^b r^c$, la dimostrazione si darà precisamente negli stessi termini dappoichè l'irreduttibilità è provata per $n' = p^a q^b$. Adunque la dimostrazione si stabilisce di mano in mano.

Il lettore vedrà di leggieri, consultando la Nota del signor Arndt, ciò che da essa ho preso e la parte che mi spetta nella dimostrazione precedente. (*)

---

(*) Avendo ricevuta dalla gentilezza del ch. Autore una copia di questa chiara ed elegante dimostrazione che non ci pare, com'egli con troppa modestia la qualifica, una semplice modificazione di quella del sig. Arndt, abbiamo creduto di far cosa grata ai lettori degli *Annali* dandola qui tradotta.

Un' altra dimostrazione assai semplice dello stesso teorema, appoggiata parimen- all'equazione $(b)$, fu esposta dal signor Dedekind nel Giornale di Crelle, tom. LIV, p. 27, ed essendo molto ingegnosa vogliamo riferirla brevemente. Proveremo che *se $f(x)$ è il divisor razionale meno elevato in grado del polinomio $F(x)$, l'equazion- $f(x) = 0$ avrà per radici tutte le radici primitive della $x^n = 1$, talchè sarà soddisfatta da $x = \rho^m$ qualunque intero primo ad $n$ sia $m$, se $\rho$ è una delle sue radici.* Infatti

1.° Sia $m = p$ numero primo, e supponiamo $f(x)$ non divisibile per $x - \rho^p$. Sia $f_1(x)$ un altro divisore irreduttibile di $F(x)$ che abbia per fattore il binomio $x - \rho^p$: questo fattore sarà commune al polinomio $\mathrm{f}(x')$ formato come nell'equazione $(b)$ prendendo $k = p$; quindi l'equazione $\mathrm{f}(x) = 0$ conterrà tutte le radici della irreduttibile $f_1(x) = 0$, ed essendo del medesimo grado di $f(x)$ non superiore a quello di $f_1(x)$, ne seguirà $\mathrm{f}(x) = f_1(x)$. Ma si avrà

$$x^n - 1 = X f(x) f_1(x)$$

e per la $(b)$

$$f(x) \equiv \mathrm{f}(x) \quad \text{mod. } p;$$

dunque

$$x^n - 1 \equiv X f(x)^2 \quad \text{mod. } p,$$

e differenziando

$$n x^{n-1} \equiv X_1 f(x) \quad \text{mod. } p,$$

donde

$$x^{n-1}(X_1 x - n X f(x)) \equiv X_1 \quad \text{mod. } p.$$

Il primo membro di quest'ultima congruenza non può abbassarsi al di sotto del grado $n - 1$, poichè se fosse

$$X_1 x - n X f(x) \equiv 0$$

ne seguirebbe $X_1 \equiv 0$, e quindi per la congruenza precedente $n \equiv 0$ mod. $p$. Ma $X_1$ non oltrepassa il grado $n-2$, perchè i gradi di $X$ e $f(x)$ uniti non possono eccedere $n-1$ : adunque l'ultima congruenza è impossibile.

Dunque $f(x)$ è divisibile per $x - \rho^p$.

2.° Essendo così $x = \rho$ una radice dell'equazione $f(x^p) = 0$, questa ha comune la stessa radice con la irreduttibile $f(x) = 0$; deve dunque ammettere anche l'altra radice $x = \rho^p$, onde $f(\rho^{p^2}) = 0$. Pertanto l'equazione $f(x^{p^2}) = 0$ ammette la radice $x = \rho$ della irreduttibile $f(x) = 0$; ammetterà dunque anche l'altra $x = \rho^p$, e si avrà $f(\rho^{p^3}) = 0$. Proseguendo similmente si troverà $f(\rho^m) = 0$ qualunque potenza di $p$ sia $m$.

3.° Sia $m$ il prodotto di due numeri $r$ ed $s$ primi tra sè, e supponiamo che la equazione $f(x) = 0$ ammetta le due radici $\rho^r$ e $\rho^s$ : essendo $x = \rho$ una radice della $f(x^r) = 0$ commune alla irreduttibile $f(x) = 0$, la prima ammetterà per radice anche l'altra $x = \rho^s$, e si avrà $f(\rho^{rs}) = 0$, talchè anche $\rho^{rs}$ ossia $\rho^m$ sarà una radice della $f(x) = 0$.

4.° Combinando i casi 2° e 3° se ne trae evidentemente la verità dell' assunto per tutti i valori di $m$.

A. Genocchi.



# SUR LES DIFFÉRENCES DE $1^p$, ET SUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR E. CATALAN.

1. La formule

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2} u_{n-2} + \ldots \pm u_0$$

donne, en supposant $u_0 = 1^p$ :

$$\Delta^n(1^p) = (n+1)^p - \frac{n}{1}\cdot n^p + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(n-1)^p - \ldots \mp \frac{n}{1}\cdot 2^p \pm 1^p,$$

$$\Delta^{n-1}(1^p) = n^p - \frac{n-1}{1}(n-1)^p + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\;2.}(n-2)^p - \ldots \pm \frac{n-1}{1}2^p \mp 1^p.$$

On conclut, de ces deux équations,

$$(n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p) = (n+1)^{p+1} - \left[\frac{n+1}{1} - 1\right] n^{p+1}$$

$$+\left[\frac{(n+1)n}{1.\,2.} - \frac{n}{1}\right](n-1)^{p+1} - \ldots \mp [n+1)n - n(n-1)]2^p \pm [(n+1)-n]1^p$$

$$= (n+1)^{p+1} - \frac{n}{1}n^{p+1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(n-1)^{p+1} - \ldots \mp \frac{n}{1}2^{p+1} \pm 1^{p+1}.$$

Donc

$$\Delta^n(1^{p+1}) = (n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p) \qquad \text{(A)}$$

2. La relation (A) donne le moyen d'obtenir, de proche en proche, et par un calcul assez simple, les différences successives de $1^2$, $1^3$, $1^4$, $1^5$, ....

En effet, si l'on prend les nombres naturels :

1, 2, 3, 4, 5, 6, ....

dont les différences premières et secondes sont

1, 1, 1, 1, 1, 1, ....
0, 0, 0, 0, 0, 0, ....

on en conclut que les quantités

$$1^1, \quad \Delta(1^1), \quad \Delta^2(1^1)$$

ont pour valeurs

$$1, \quad 1, \quad 0$$

Multipliant ces derniers nombres par

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

ce qui donne

$$1, \quad 2, \quad 0,$$

on a, par la formule (A) :

$$\Delta(1^2) = 1 + 2 = 3, \quad \Delta^2(1^2) = 2 + 0 = 2, \quad \Delta^3(1^2) = 0.$$

Ainsi, la quantité $1^2$, et ses différences successives, ont pour valeurs:

$$1, \quad 3, \quad 2, \quad 0.$$

En continuant, on forme le tableau suivant (*) :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^1$ | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| $1^2$ | 1 | 2 | | | | | | | | | |
| | 1 | 3 | 2 | | | | | | | | |
| $1^3$ | 1 | 6 | 6 | | | | | | | | |
| | 1 | 7 | 12 | 6 | | | | | | | |
| $1^4$ | 1 | 14 | 36 | 24 | | | | | | | |
| | 1 | 15 | 50 | 60 | 24 | | | | | | |
| $1^5$ | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 | | | | | | |
| | 1 | 31 | 180 | 390 | 360 | 120 | | | | | |
| $1^6$ | 1 | 62 | 540 | 1560 | 1800 | 720 | | | | | |
| | 1 | 63 | 602 | 2100 | 3360 | 2520 | 720 | | | | |
| $1^7$ | 1 | 126 | 1806 | 8400 | 16800 | 15120 | 5040 | | | | |
| | 1 | 127 | 1932 | 10206 | 25200 | 31920 | 20160 | 5040 | | | |
| $1^8$ | 1 | 254 | 5796 | 40824 | 126000 | 191520 | 141120 | 40320 | | | |
| | 1 | 255 | 6050 | 46620 | 166824 | 317520 | 332640 | 181440 | 40320 | | |
| $1^9$ | 1 | 510 | 18150 | 186480 | 834120 | 1905120 | 2328480 | 1451520 | 362880 | | |
| | 1 | 511 | 18660 | 204630 | 1020600 | 2739240 | 4233800 | 3780000 | 1814400 | 362880 | |
| $1^{10}$ | 1 | 1022 | 55980 | 818520 | 5103600 | 16435440 | 29635200 | 30240000 | 16329600 | 3628800 | |
| | 1 | 1023 | 57002 | 874500 | 5921520 | 21538440 | 46070640 | 59875200 | 46569600 | 19958400 | 3628800 |

(*) Ce tableau est tiré, en grande partie, d'une brochure intitulée : *Table des quarrés et des cubes, par C. Séguin l'aîné* (1801). L'auteur, après avoir donné, sous forme empirique, la relation (**A**), indique le développement de

$$S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p,$$

ordonné suivant les puissances de $n$. Je dois la connaissance de ce curieux opuscule, très rare aujourd'hui, au savant M. Terquem.

3. Dans une *Note sur la somme des puissances semblables des nombres naturels*, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*), j'ai démontré la formule

$$S_p = \frac{A_p}{p+1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1) + \frac{B_p}{p}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+2)$$

$$+\frac{C_p}{p-1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+3) \qquad \text{(B)}$$

$$+\ldots+\frac{N_p}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n\,.$$

Les coefficients $A_p$, $B_p$, $C_p$, .... ont les valeurs contenues dans le tableau suivant:

| $p$ | $A_p$ | $B_p$ | $C_p$ | $D_p$ | $E_p$ | $T_p$ | $G_p$ | $H_p$ | $K_p$ | $L_p$ | $M_p$ | $N_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 6 | 7 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 10 | 25 | 15 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 1 | 15 | 65 | 90 | 31 | 1 | | | | | | |
| 7 | 1 | 21 | 140 | 350 | 301 | 63 | 1 | | | | | |
| 8 | 1 | 28 | 266 | 1050 | 1701 | 966 | 127 | 1 | | | | |
| 9 | 1 | 36 | 462 | 2646 | 6951 | 7770 | 3025 | 255 | 1 | | | |
| 10 | 1 | 45 | 750 | 19980 | 22827 | 42525 | 34105 | 9330 | 511 | 1 | | |
| 11 | 1 | 55 | 1155 | 25980 | 162687 | 179687 | 246430 | 145750 | 28501 | 1023 | 1 | |
| 12 | 1 | 66 | 1705 | 36375 | 370527 | 1318296 | 1323582 | 1378900 | 611501 | 86526 | 2047 | 1 |

Avec un peu d'attention, on reconnaît que les nombres placés *en diagonale*, dans ce second tableau, sont égaux à ceux qui constituent le tableau précédent, divisés par les produits 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, .... Autrement dit :

$$3 = \Delta(1^2)\,,\quad 7 = \Delta(1^3)\,,\qquad 15 = \Delta(1^4)\,,\ \ldots\ldots$$

$$6 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^3)\,,\quad 25 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^4)\,,\quad 90 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^5)\,,\ \ldots\ldots$$

$$10 = \frac{1}{2.\,3}\Delta^3(1^4)\,,\quad 65 = \frac{1}{2.\,3}\Delta^3(1^5)\,,\quad 350 = \frac{1}{2.\,3}\Delta^3(1^6)\,,\ \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Il résulte de là que l'on peut écrire ainsi la formule (B) :

(*) Tome XV, p. 230.

$$S_p = \frac{1}{2}(n+1)n + \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\Delta(1^{p-1})$$

$$+ \frac{1}{4.\,2}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta^2(1^{p-1}) + \frac{1}{5.2.3}(n+1)\ldots(n-3)\Delta^3(1^{p-1})$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(p+1).\,2.\,3\ldots(p-1)}(n+1)n\ldots(n-p+1)\Delta^{p-1}(1^{p-1}) \qquad \text{(C)}$$

Cette seconde expression de $S_p$ (trouvée par M. Puiseux) va nous donner les nombres de Bernoulli sous une forme beaucoup plus commode, pour le calcul effectif, que toutes celles que l'on connaît jusqu'à présent.

En effet, *le* $(p-1)^s$ *nombre de Bernoulli est égal au coefficient de* $n$, *dans le développement de* $S_p$, *ordonné suivant les puissances de* $n$ (*). Donc, d'après l'équation (3) :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \ldots\ldots \pm \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1})\ ;$$

ou, pour plus de régularité dans la notation,

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^q) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{q+2}\Delta^q(1^q). \qquad \text{(D)}$$

5. Cette relation générale donne successivement, d'après le premier tableau :

$$B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$B_2 = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{2}{4} = 0\ ,$$

$$B_3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{3} + \frac{12}{4} - \frac{6}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30},$$

$$B_4 = \frac{1}{2} - \frac{15}{3} + \frac{50}{4} - \frac{60}{5} + \frac{24}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0\ ;$$

etc. (**)

6. Le *Tableau des carrés et des cubes* donne, sous forme empirique, une règle qui équivaut à la formule

$$B_q = 1 - \frac{1}{2}\Delta(1^{q+1}) + \frac{1}{3}\Delta^2(1^{q+1}) - \ldots \pm \frac{1}{q+1}\Delta^q(1^{q+1}) \mp \frac{1}{q+2}\Delta^{q+1}(1^{q+1}) \qquad \text{(E)},$$

(*) *Lacroix*, tom. 3.° p. 84.

(**) On sait que $B_q = 0$, si l'indice $q$ est pair.

laquelle est un peu moins simple que la nôtre. Pour vérifier l'accord des deux formules, il suffit de prouver que

$$1-\frac{1}{2}\left[\Delta(1^{q+1})+1^q\right]+\frac{1}{3}\left[\Delta^2(1^{q+1})+\Delta(1^q)\right]-\frac{1}{4}\left[\Delta^3(1^{q+1})+\Delta^2(1^q)\right]+\ldots$$

$$\mp\frac{1}{q+2}\left[\Delta^{q+1}(1^{q+1})+\Delta^q(1^q)\right]=0\,. \qquad \text{(F)}$$

Or, la formule (A) peut être écrite sous cette forme :

$$\Delta^n(1^{p+1})+\Delta^{n-1}(1^p)=(n+1)\left[\Delta^n(1^p)+\Delta^{n-1}(1^p)\right],$$

puis sous celle-ci :

$$\frac{\Delta^n(1^{p+1})+\Delta^{n-1}(1^p)}{n+1}=\Delta^{n-1}(2^p);$$

donc l'équation (F) équivaut à

$$1-(2^q)+\Delta(2^q)-\Delta^2(2^q)+\ldots\mp\Delta^q(2^q)=0.$$

Enfin cette dernière relation est identique, si l'on égard à la formule presque évidente :

$$u_1-\Delta u_1+\Delta^2 u_1-\ldots\mp\Delta^p u_1=u_0\pm\Delta^{p+1}(u_0).$$

Paris, Juillet 1859.

# RICERCHE ANALITICHE SOPRA LE ATTRAZIONI ESERCITATE DA UNA LINEA PIANA, VERSO UN PUNTO MATERIALE COLLOCATO NEL SUO PIANO, ED IN PARTICOLARE SULL'ATTRAZIONE DEL QUADRANTE DI UN ELLISSE VERSO IL CENTRO

**DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.**

1º Riferiamo una linea piana a due assi ortogonali, e siano $x$, $y$, le coordinate di un suo punto qualunque, si chiami $s$ l'arco corrispondente a partir da un punto fisso. Ora il valor numerico di quest'arco $s$ potrà rappresentare la quantità di materia ivi contenuta, in guisa, che se $\mathrm{d}s$ sia il suo elemento differenziale, ed $r$ la distanza fra l'origine, ed il punto $(x, y)$ si avrà

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Ciò posto è chiaro che $\frac{\mathrm{d}s}{r^2}$ esprimerà l'attrazione esercitata secondo la legge Neutoniana dall'elemento $\mathrm{d}s$ verso un punto collocato nell'origine delle coordinate, mentre l'integrale

$$\mathrm{V} = \int \frac{\mathrm{d}s}{r^2}$$

rappresenterà la somma delle attrazioni dell' arco $s$ lungo le distanze $r$. In un mio precedente articolo sulle figure inverse inserito nel Nº 3º di questi *Annali* pel maggio e giugno 1859 pag. 189, osservai che se $s$ sia l'arco di una linea piana, $\int \frac{\mathrm{d}s}{r^2}$ sarà il corrispondente arco della linea inversa, d'onde ne segue, che la somma delle attrazioni in questione viene numericamente espressa per l' arco della linea inversa. Tralascio qui di fare qualsiasi applicazione pel calcolo della funzione V; così mi basterà accennare, che per l'ellisse, e per l'iperbola la funzione V dipende dai trascendenti ellittici delle tre note specie, come già dimostrai fin dal 1844 in una mia Memoria inserita nel giornale arcadico. Nel calcolo delle attrazioni avvi un'altra funzione, che suol chiamarsi il *potenziale*: questa funzione nel nostro caso verrebbe definita dall' integrale

$$\mathrm{P} = \int \frac{\mathrm{d}s}{r}.$$

Mostreremo in appresso una qualche applicazione pel calcolo della funzione P.

2° Si decomponga ora la forza esercitata dall' elemento d$s$ lungo il raggio $r$ in due parallele ai due assi ortogonali, e sia $\alpha$ l'angolo formato dal raggio $r$ con l'asse delle ascisse, si avrà primieramente

$$x = r\cos\alpha\,, \qquad y = r\operatorname{sen}\alpha\,,$$

quindi le componenti elementari dirette secondo i due assi saranno

$$\frac{ds}{r^2}\cos\alpha = \frac{x ds}{r^3}\,, \qquad \frac{ds}{r^2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{y ds}{r^3}\,.$$

Se dunque si chiamino X, Y le componenti parallele agli assi di tutte le forze di attrazioni dell'arco $s$ verso un punto collocato nell'origine avremo

$$X = \int\frac{x ds}{r^3}\,, \qquad Y = \int\frac{y ds}{r^3}\,.$$

Conosciute, e determinate le forze componenti si avrà per la risultante $R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, ed in fine $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$ ci faranno conoscere la direzione della risultante R rapporto agli assi.

3° Ci proponiamo presentemente per applicazione di calcolare l'attrazione esercitata da un quadrante ellittico verso un punto collocato nel centro. Si vedrà che i trascendenti ellittici di prima e seconda specie sono quei che primeggiano in queste ricerche, mentre per la determinazione del potenziale vi si presenta il trascendente ellittico di terza specie. Chiamati $a$, $b$ i semiassi di un'ellisse, si avrà per la sua equazione riferita al centro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quale verificata dalla sostituzione circolare otteniamo tanto per le coordinate, quanto per il raggio $r$

$$x = a\operatorname{sen}u\,, \qquad y = b\cos u\,, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

quindi

$$ds = du\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}\,, \qquad r^2 = b^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u.$$

Nel nostro caso l'arco $s$ si computa a partir dall'estremità del semiasse minore, e sostituendo nel secondo membro della X, $1 - \cos^2 u$ invece di $\operatorname{sen}^2 u$, si avrà definitivamente per le due forze componenti

$$X = a\int\frac{\operatorname{sen}u\,du\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 u]}}{\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 u]^3}}$$

$$Y = b\int\frac{\cos u\,du\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}{\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]^3}}.$$

Per estendere all'intero quadrante ellittico i valori delle due forze X, Y converrà integrare i secondi membri fra i limiti $u=0$, $u=\frac{1}{2}\pi$, ed otterremo per le componenti dell'attrazione del quadrante ellittico verso un punto situato nel centro

$$X=a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen} u\, du\,\sqrt{[b^2+(a^2-b^2)\cos^2 u]}}{\sqrt{[a^2-(a^2-b^2)\cos^2 u]^3}}$$

$$Y=b\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos u\, du\,\sqrt{[a^2-(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}{\sqrt{[b^2+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u]^3}}$$

ove nel secondo membro della $x$ abbiamo sostituito $1-\cos^2 u$ invece di $\operatorname{sen}^2 u$. Gli integrali in proposito si riducono ai trascendenti ellittici di prima e seconda specie, il che verremo ad indicare con la maggior brevità possibile.

4. Pongasi per il secondo membro della X

$$\sqrt{(a^2-b^2)}\cos u = a\cos\theta$$

si avrà per l'integrale indefinito

$$X=\frac{1}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}\int\frac{d\theta\sqrt{(a^2+b^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta)}}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Il limite superiore $u=\frac{1}{2}\pi$ porge anche $\theta=\frac{1}{2}\pi$, mentre nel limite inferiore $u=0$ si ha

$$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}, \qquad \text{o} \qquad \theta_1=\text{arc cos.}\left(\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)$$

d'onde ponendo $(a^2-b^2)k^2=a^2$, si trarrà per l'integrale definito

$$X=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}\int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta\sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2\theta)}}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

La quantità $k<1$ dicesi nei trascendenti ellittici il modulo della funzione. Con una trasformazione somigliante si può far dipendere l'integrale definito espresso da Y dai medesimi limiti della X: ponendo infatti nella Y

$$\sqrt{(a^2-b^2)}\operatorname{sen} u=\cos\theta$$

si vede in un'istante, che ai limiti $u=0$, $u=\frac{1}{2}\pi$ corrisponde

$$\theta=\tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{e} \quad \theta_1=\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)$$

donde rovesciando i limiti dell'integrale si otterrà

$$Y = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)\sqrt{(a^4-b^4)}} \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(1-k^2\text{sen}^2\theta)^3}} .$$

Le due ritrovate espressioni della X, e della Y dipendono da funzioni ellittiche di prima, e seconda specie si incomplete, che complete, ma i noti teoremi sulla somma, e sottrazione delle funzioni ellittiche porgono una riduzione finale a sole funzioni ellittiche incomplete, come si vedrà da quanto segue.

5.° Premettiamo per le notazioni di *Legendre* di fare

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1 - k^2\text{sen}^2\theta)} ,$$

come per le funzioni ellittiche incomplete di prima, e seconda specie

$$F(k,\theta) = \int \frac{d\theta}{\Delta(\theta)}, \qquad E(k,\theta) = \int d\theta \, \Delta(\theta)$$

e per le funzioni complete si scriverà

$$F(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \quad , \qquad E(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \, \Delta(\theta)$$

Ciò posto i valori di X, ed Y divengono

$$X = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a\sqrt{(a^2-b^2)}} \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta\,\Delta(\theta)}{\text{sen}^2\theta} , \qquad Y = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)\sqrt{(a^4-b^4)}} \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}^2\theta \, d\theta}{\Delta^3(\theta)} .$$

Per calcolare il primo degli integrali osservo primieramente che

$$\int \frac{d\theta\,\Delta(\theta)}{\text{sen}^2\theta} = \int \frac{(1-k^2\text{sen}^2\theta)d\theta}{\text{sen}^2\theta\,\Delta(\theta)} = \int \frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta\,\Delta(\theta)} - k^2 \int \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} .$$

Di più da una mia Memoria pubblicata nel giornale arcadico pel mese di Agosto, e Settembre 1848 sulla riduzione di alcuni integrali, al parag.° 3.° si trova la formola

$$\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta\,\Delta(\theta)} = F(k,\theta) - E(k,\theta) - \Delta(\theta)\cot\theta$$

d'onde facendo $k'^2 = 1 - k^2$ , o $k^2 + k'^2 = 1$ si avrà

$$\int \frac{d\theta\,\Delta(\theta)}{\text{sen}^2\theta} = k'^2 F(k,\theta) - E(k,\theta) - \Delta(\theta)\cot\theta$$

la quale si dovrà estendere fra i limiti $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , $\theta = \theta_1$ . Nello stesso modo per calcolare il valore della Y prendo la riduzione di una formola, che trovasi alla

pag. 257 del tom. 1.° del *Traité des functions elliptiques* de Legendre, cioè

$$\int \frac{\text{sen}^2\theta \, d\theta}{\Delta^3(\theta)} = \frac{1}{k^2 k'^2}\Big(E(k, \theta) - k'^2 F(k, \theta)\Big) - \frac{\text{sen}\,\theta \cos\theta}{k'^2 \Delta(\theta)} .$$

Ora per $\theta = \frac{1}{2}\pi$, i termini indipendenti dalle funzioni ellittiche si annullano, mentre per $\theta = \theta_1$ si trae

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}, \qquad \text{sen}\,\theta_1 = \frac{b}{a}, \qquad \Delta(\theta_1) = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = k$$

d'onde per la sostituzione

$$\cot\theta_1 \, \Delta(\theta_1) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \qquad \frac{\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_1}{k'^2 \Delta(\theta_1)} = \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{(a^4 - b^4)}}{a^3 b}$$

Di qui se per maggior semplicità si rappresentino con le sole lettere F, E le funzioni ellittiche complete di modulo $k$, e con $F(\theta_1)$, $E(\theta_1)$ le incomplete dello stesso modulo, e di ampiezza $\theta_1$ i due precedenti valori di X, Y si ridurranno dopo brevi riduzioni ad

$$X = \frac{1}{b} + \frac{k'}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\left(\frac{k'^2 [F - F(\theta_1)] - [E - E(\theta_1)]}{kk'}\right)$$

$$Y = \frac{1}{a} + \frac{k}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\left(\frac{E - E(\theta_1) - k'^2 [F - F(\theta_1)]}{kk'}\right).$$

La forma simmetrica della quale sono rivestiti i precedenti valori, viene alquanto alterata, quando per i noti teoremi dati da Legendre le differenze delle due funzioni ellittiche si riducano ad una sola funzione ellittica incompleta, il che si può sempre eseguire mediante una trasformazione reale, e che nel nostro caso viene ad ultimare la questione propostaci.

6.° Se $k$, e $k'$ siano il modulo, ed il suo complemento, $\varphi$, e $\theta$ due ampiezze; la questione si ridurrà a soddisfare all'equazione

$$F(\varphi) + F(\theta) = F$$

ove F è la funzione completa, e le due altre diconsi complementarie in questo caso: per le formole date da Legendre alla pag. 21 del tom. 1.° *Traité des functions elliptiques*, converrà che fra gli angoli $\varphi$, e $\theta$ abbia luogo l'equazione

$$k' \tang\varphi \tang\theta = 1 :$$

Di qui si trae

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{\cos\theta}{\Delta(\theta)}, \qquad \cos\varphi = \frac{k' \,\text{sen}\,\theta}{\Delta(\theta)}, \qquad \Delta(\varphi)\,\Delta(\theta) = k'$$

d'onde per $\theta = \theta_1$

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \qquad k'^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2},$$

ove $\theta_1$ sia l'ampiezza definita come nell'antecedente paragrafo, si ricaverà per la nuova ampiezza $\varphi$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{(a^4 - b^4)}}{a^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \Delta(\varphi) = \frac{k'}{\Delta(\theta_1)} = \frac{b}{a}$$

Con la medesima relazione fra le due ampiezze $\varphi$, e $\theta$ si soddisfa per le funzioni ellittiche di seconda specie all'equazione

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\theta) - \mathrm{E} = k^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

Per il nostro caso di $\theta = \theta_1$, si trae

$$k^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{k'\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$$

e perciò avremo

$$\mathrm{F} - \mathrm{F}(\theta_1) = \mathrm{F}(\varphi), \qquad \mathrm{E} - \mathrm{E}(\theta_1) = \mathrm{E}(\varphi) - \frac{k'\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$$

quali sostituite nel secondo membro dei valori di X, Y stabiliti alla fine del precedente parag.° 5.°, si otterrà definitivamente

$$\mathrm{X} = \frac{a^2+b^2}{a^2 b} + \frac{k'[k'^2\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi)]}{kk'\sqrt{(a^2-b^2)}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{k[\mathrm{E}(\varphi) - k'^2\mathrm{F}(\varphi)]}{kk'\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

In queste nuove funzioni ellittiche incomplete l'ampiezza $\varphi$ è determinata dall' equazione

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{(a^4-b^4)}}{a^2}\right).$$

Tali sono adunque le espressioni finali delle due forze componenti dell'attrazione esercitata da un quadrante ellittico verso un punto collocato nel centro: la risultante sarà $\mathrm{R} = \sqrt{(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)}$ come $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}}$ esprimeranno il coseno, ed il seno formato dalla risultante secondo l'asse delle ascisse. Alle medesime espressioni di X, Y si potrebbe giungere col trasformare immediatamente gli integrali rapporto a $\theta$, e che abbiamo riportato nel principio del parag.° 5.°: infatti mantenuta la relazione

$$k' \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\theta = 1$$

oltre i valori di $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, ... ottenuti di sopra, si trova anche $d\theta = -\frac{k' d\varphi}{\Delta^2(\varphi)}$, d'onde

$$\frac{d\theta\,\Delta(\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{-k'^2 d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta(\varphi)}, \quad \frac{\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}{\Delta^3(\theta)} = -\frac{1}{k'^2}\,\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Per il limite $\theta = \frac{1}{2}\pi$ si ha $\varphi = 0$, e per $\theta = \theta_1$ si ha come sopra

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{\sqrt{(a^4 - b^4)}}{a^2}, \quad \varphi_1 = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{(a^4 - b^4)}}{a^2}\right)$$

di qui rovesciando i limiti, i citati integrali si ridurranno ad

$$X = \frac{b^2}{a\sqrt{(a^4 - b^4)}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta(\varphi)}, \quad Y = \frac{a^2}{b\sqrt{(a^4 - b^4)}}\int_0^{\varphi_1}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Qui pure la simmetria cesserà di aver luogo quando si sostituiscano i valori ridotti alle sole funzioni ellittiche; così alla pag. 257 del citato volume dell' Opera di Legendre si trova

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k'^2}\Big(\operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\varphi) + k'^2 F(\varphi) - E(\varphi)\Big)$$

$$\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k'^2}\Big(E(\varphi) - k'^2 F(\varphi)\Big).$$

Estendendo questi integrali fra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_1$, ed eseguite tutte le riduzioni, e sostituzioni; i valori di X, Y verranno a coincidere con quei di sopra ritrovati in questo parag.

7.° Per completare ciò che riguarda l'ellisse ci resterà a calcolare a tutto il quadrante l'integrale

$$P = \int\frac{ds}{r}$$

e che dicesi il *potenziale.* Ora per i valori di $ds$, ed $r$ riportati nel principio del parag. 3.° si avrà per l'ellisse

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} du\frac{\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}{\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}.$$

Quest'integrale si ridurrà ai trascendenti ellittici col fare

$$\operatorname{tang} u = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi$$

donde

$$du = \frac{ab\,d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{ab\,d\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{b^2\operatorname{sen}^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}, \quad \cos^2 u = \frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u = \frac{a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$b^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u = \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

Di più i limiti dell'integrale saranno i medesimi, e perciò

$$\mathrm{P} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi\,\sqrt{[a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi]}}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}$$

ed anche

$$\mathrm{P} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi[a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi]}{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi]\,\sqrt{[a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi]}}.$$

Decomponiamo la frazione razionale, che serve di coefficiente a $d\varphi$, cioè

$$\frac{a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi} = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}$$

per cui

$$\mathrm{P} = (a^2 + b^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$$- a^2b^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi]\,\sqrt{[a^4 - (a^4 - b^4)\operatorname{sen}^2\varphi]}}.$$

Poniamo infine

$$k^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4}, \quad n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}, \quad \Delta(\varphi) = \sqrt{(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

e si avrà

$$\mathrm{P} = \frac{(a^2 + b^2)}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1 + n\operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}.$$

È dunque ridotto il secondo membro alla forma normale dei trascendenti ellittici completi di prima, e terza specie, e che secondo la notazione di Legendre si potrà porre

*

$$P = \frac{(a^2 + b^2)}{a^2} F(k) - \frac{b^2}{a^2} \Pi(n, k).$$

Il parametro $n$ è negativo, e minore del quadrato del modulo, il che coincide per la funzione ellittica di terza specie con il terzo caso considerato da Legendre; se si chiami $\theta$ un angolo da determinarsi, si avrà per il parametro $n$

$$n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2} = -k^2 \mathrm{sen}^2\theta = \frac{(a^4 - b^4)}{a^4} \mathrm{sen}^2\theta$$

d'onde

$$\mathrm{sen}^2\theta = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Ciò posto per una formola data da Legendre alla pag. 141 del citato vol. 1°., e segnata con $(p')$ si ha

$$\Pi(n, k) = F(k) + \frac{\mathrm{tang}\,\theta}{\Delta(\theta)}\Big(F(k)\,E(k, \theta) - E(k)\,F(k, \theta)\Big).$$

Nel nostro caso

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{a}{b}, \qquad \Delta(\theta) = \frac{b}{a}.$$

Sostituiti questi valori si ricava in fine

$$P = F(k) + E(k)\,F(k, \theta) - F(k)\,E(k, \theta)$$

l'ampiezza $\theta$ determinata dalla formola

$$\theta = \mathrm{arc.\,sen}\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right).$$

Tralasciamo di fare ulteriori applicazioni ad altre curve, e potrà essere che l'esposte ricerche ritrovino una qualche utile applicazione nella fisica matematica.



## INTORNO AD UNA EQUAZIONE TRINOMIA.

## NOTA

DEL SIG. PROF. ANGELO GENOCCHI.



Nel tomo XI degli *Annali* del Gergonne, il Signor Berndtson diede come espressione di una radice dell'equazione $x^{2n+1} - x - k = 0$, nel caso di $k$ reale e positivo, la seguente

$$(1) \qquad x = \frac{b^2 - ac}{2b - (a + c)}$$

dove

$$(2) \qquad a = \sqrt[2n+1]{1 + k}, \qquad b = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{a}}, \qquad c = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{b}}.$$

La condizione imposta di $k$ reale e positivo fece sospettare al prof. Minich (*) che questa soluzione sia soltanto approssimativa, non rigorosa; senza di che sarebbe sciolta algebricamente l'equazione generale del 5° grado che può sempre, come annunciò Eisenstein e dimostrarono Jerrard e Hamilton, ridursi a forma trinomia. Le proposizioni che soggiungo provano che il sospetto del prof. Minich è fondato.

Quando $k$ è reale e positivo, l'equazione proposta ha una radice tra 1 e $\infty$, che denoteremo con $x$, e poichè ne risulta

$$x = \sqrt[2n+1]{x + k}, \qquad x = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{x}},$$

e per essere $x > 1$, confrontando queste formole con le (2) otterremo

$$x > a, \qquad x < b, \qquad x > c.$$

La soluzione (1) soddisfa a tali condizioni, traendosi da essa

$$(3) \quad x - a = \frac{(b - a)^2}{2b - a - c}, \quad b - x = \frac{(b - a)(b - c)}{2b - a - c}, \quad x - c = \frac{(b - c)^2}{2b - a - c};$$

e di qui si ha pure

$$(x - a)(x - c) = (b - x)^2,$$

sicchè considerati $a$, $b$, $c$ come tre valori approssimati di $x$, la formula del Berndtson

(*) Atti dell'Istituto Veneto, 1858—1859, pag. 25—26.

suppone che l'errore del termine medio ed eccessivo $b$ sia medio proporzionale fra gli errori de'termini estremi ed insufficienti $a$, $c$.

Ma si può proseguire facendo

$$d = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{c}}, \quad e = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{d}}, \quad f = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{e}}, \text{ ecc.}$$

e saranno $d$, $e$, $f$ ... nuovi valori approssimati, alternativamente maggiori e minori della cercata radice $x$.

Abbiamo

$$\frac{b^{2n} - x^{2n}}{b - x} > 2nx^{2n-1}, \qquad b^{2n} - x^{2n} = \frac{k}{ax}(x - a),$$

onde

$$b - x < \frac{k}{2nax^{2n}}(x - a); \quad \text{ma} \quad a^{2n} = \frac{1 + k}{a}, \qquad x^{2n} > a^{2n} > \frac{k}{a};$$

dunque $b - x < \frac{x - a}{2n}$ · Similmente

$$\frac{x^{2n} - c^{2n}}{x - c} > 2nc^{2n-1}, \quad x^{2n} - c^{2n} = \frac{k}{bx}(b - x), \quad c^{2n-1}x > c^{2n} > \frac{k}{b},$$

e quindi

$$x - c < \frac{b - x}{2n}. \quad \text{Sarà pure} \quad d - x < \frac{x - c}{2n}, \text{ ecc.}$$

e così i valori $a$, $b$, $c$, $d$, .... andranno accostandosi ad $x$ in modo che gli errori corrispondenti potranno divenir minori d'ogni quantità data essendo ciascuno minor del precedente diviso per $2n$; il qual metodo d'approssimazione è simile a quello che il signor Piobert propose negli *Annali* del Terquem **1851**, pag. **174**, e stimò preferibile al metodo di Gauss.

Chiamiamo $\alpha$ il valore di $x$ dato dalla formola (1), e facciamo

$$(4) \qquad \beta = \frac{bd - c^2}{b + d - 2c}, \quad \gamma = \frac{d^2 - ce}{2d - c - e}, \dots :$$

sarà, come facilmente si trova,

$$b > \alpha > e, \qquad c < \beta < d, \qquad d > \gamma > e, \dots,$$

ma si avrà inoltre $\alpha > \beta > \gamma \dots$, come ora proveremo. Avremo

$$\frac{b - c}{\alpha - c} = \frac{2b - a - c}{b - c} = 1 + \frac{b - a}{b - c}, \quad \frac{b - c}{\beta - c} = \frac{b + d - 2c}{d - c} = 1 + \frac{b - c}{d - c},$$

e quindi sarà $\alpha > \beta$ se si dimostrerà che $\frac{b-a}{b-c} < \frac{b-c}{d-c}$. Ma

$$\frac{b^{2n}-c^{2n}}{b-c} < 2nb^{2n-1}, \qquad \frac{d^{2n}-c^{2n}}{d-c} > 2nc^{2n-1},$$

ossia

$$\frac{k}{a}\,\frac{b-a}{b-c} < 2nb^{2n}, \qquad \frac{k}{b}\,\frac{b-c}{d-c} > 2nc^{2n},$$

e di più

$$ab^{2n} = a+k, \qquad bc^{2n} = b+k,$$

onde $ab^{2n} < bc^{2n}$. Dunque

$$\frac{b-a}{b-c} < \frac{2n}{k}.\,bc^{2n} < \frac{b-c}{d-c},$$

e però $\alpha > \beta$. Nella stessa maniera si proverà $\beta > \gamma$, ecc.

Ciò posto, faremo un'osservazione che per verità è semplicissima.

« Avendosi una serie di valori $a$, $b$, $c$, $d$,... che si approssimano indefinitamente, e quali in più, quali in meno, ad una quantità incognita $x$, e una seconda serie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., che sia sempre crescente o decrescente, e di cui ciascun termine sia compreso ordinatamente fra due termini consecutivi della prima, nessun termine della seconda serie potrà uguagliare $x$, ma saranno tutti maggiori di $x$ se la serie è decrescente, o tutti minori se la serie è crescente. »

Perocchè i termini della seconda serie essendo compresi tra quelli della prima, andranno come questi accostandosi indefinitamente ad $x$, e potranno differire da $x$ meno d'ogni quantità data, onde nella seconda serie si troverà un termine $\omega$ che differirà da $x$ meno di quanto differiscano i primi due termini $\alpha$ e $\beta$. Ma nel caso della serie decrescente si ha $\alpha > \beta > \omega$, e però $\alpha - \omega > \alpha - \beta$; dunque allora non può essere $x$ uguale nè maggiore di $\alpha$ il che darebbe $x - \omega > \alpha - \beta$ contro l'ipotesi. Se la serie è crescente, si ha $\alpha < \beta < \omega$, $\omega - \alpha > \beta - \alpha$, e quindi $x$ non può essere uguale nè minore di $\alpha$.

Questa osservazione si applica ai valori di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... dati dalle formule (1) e (4), e mostra che la soluzione del Berndtson non è rigorosa ma approssimata per eccesso, e che le formole (4) presentano valori più prossimi al vero e tutti maggiori del vero.

L'inesattezza della formula (1) più speditamente si riconosce se l'equazione proposta sia del terzo grado, avendosi

$$n = 1, \qquad b^2 = 1 + \frac{k}{a}, \qquad x^2 = 1 + \frac{k}{x}, \qquad c^2 = 1 + \frac{k}{b},$$

onde

$$b^2 - x^2 = \frac{k}{ax}(x - a)\ , \qquad b^2 - c^2 = \frac{k}{ab}(b - a), \quad \text{e quindi } \frac{b+x}{b+c} = \frac{b}{x},$$

poichè dalle (3) risulta

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b-a}{b-c}: \quad \text{sarebbe dunque} \quad \frac{x-c}{b+x} = \frac{b-x}{b},$$

e avendosi anche dalle (3)

$$\frac{x-c}{b-c} = \frac{b-x}{b-a}, \quad \text{se ne trarrebbe} \quad \frac{b+x}{b} = \frac{b=c}{b-a}, \quad \frac{x}{b} = \frac{a-c}{b-a},$$

il che darebbe $x$ negativo per essere $a < c$. Si possono anche fare casi numerici, prendere per esempio $k = 7$, restando $n = 1$: fatte le sostituzioni si troverà che il valore (1) non soddisfa alla proposta.

Vogliamo anche stimare il grado d'approssimazione svolgendo i valori approssimati in serie ordinate per le potenze di $k$ e cercando il numero de'termini esatti. A tal fine giova osservare:

1° Che « se abbiasi un' equazione della forma $x = \varphi(kx^m)$, e sia $a$ un valor » prossimo di $x$ che svolto per le potenze ascendenti di $k$ presenti $r$ termini esatti, » si otterrà un altro valor prossimo $b$ che avrà un termine esatto di più, prendendo » $b = \varphi(ka^m)$. »

Infatti potremo scrivere $a = x + \mathrm{A}k^r$, supponendo A una funzione di $k$ che non divenga infinita per $k = 0$, e si avrà quindi

$$b = \varphi[k(x + \mathrm{A}k^r)^m] = \varphi(kx^m) + \frac{d\varphi(kx^m)}{dx}\mathrm{A}k^r + \frac{d^2\varphi(kx^m)}{2dx^2}(\mathrm{A}k^r)^2 + \ldots,$$

d'onde a motivo di

$$\varphi(kx^m) = x\ , \qquad \frac{d\varphi(kx^m)}{dx} = mx^{m-1}\,k\varphi'(kx^m)\ ,$$

trarremo

$$b = x + \mathrm{B}k^{r+1}\ ,$$

fatto

$$\mathrm{B} = m\mathrm{A}x^{m-1}\,\varphi'(kx^m) + \frac{d^2\varphi(kx^m)}{2dx^2}\mathrm{A}^2k^{r-1} + \ldots$$

2° Che « trovato similmente un nuovo valor prossimo $c = \varphi(kb^m)$ che avrà un » termine esatto più di $b$, la formola (1) ne darà un quarto che avrà un termine » esatto più di $c$. »

Si chiami $\alpha$ il valore dato dalla formola (1), e si ponga

$$a = x + Ak^r\,, \qquad b = x + Bk^{r+1}\,, \qquad c = x + Ck^{r+2}\,;$$

siano inoltre $A_0$, $B_0$, $C_0$ i valori di A, B, C nel caso di $k = 0$, e facciasi

$$A = A_0 + A_1 k\,, \qquad B = B_0 + B_1 k\,, \qquad C = C_0 + C_1 k.$$

Avremo

$$2b - a - c = -Ak^r + 2Bk^{r+1} - Ck^{r+2}\,,$$

$$b^2 - ac = (B^2 - AC)k^{2r+2} - Cx^{r+2} + 2Bxk^{r+1} - Axk^r\,,$$

e però

$$\alpha = x - \frac{B^2 - AC}{A - 2Bk + Ck^2}\,k^{r+2}\,;$$

di più $B^2 - AC$ si cambierà in una espressione della forma $B_0^2 - A_0C_0 + Lk$. Ma essendo

$$\frac{d^2\varphi(kx^m)}{dx^2} = m\,(m-1)x^{m-2}\,k\varphi'(kx^m) + m^2x^{2m-2}\,k^2\varphi''(kx^m)\,,$$

$$\varphi'(kx^m) = \varphi'(0) = kx^m\,\varphi''(0) + \frac{k^2x^{2m}}{1.2}\varphi'''(0) + \ldots;$$

è chiaro che il valore dianzi riferito di B si riduce nel caso di $k = 0$ ad

$$mA_0\,x^{m-1}\,\varphi'(0)\,:$$

similmente sarà

$$C_0 = mB_0\,x^{m-1}\varphi'(0)\,,$$

e quindi

$$B_0^2 - A_0C_0 = B_0\,[B_0 - mA_0x^{m-1}\varphi'(0)\,] = 0.$$

Dunque

$$B^2 - AC = Lk\,,$$

e infine

$$\alpha = x + Mk^{r+3}\,.$$

Nel caso nostro l'equazione $x = \varphi(kx^m)$ rappresenta

$$x = \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{x}}\,,$$

ed $a$ è un valor prossimo di $x$ che svolto per le potenze di $k$ ha comune con $x$ il primo termine 1. Adunque secondo le premesse osservazioni, $b$ avrà due termini esatti, $c$ ne avrà tre, $d$ quattro ecc., e di più $\alpha$ avrà quattro termini esatti, $\beta$ cinque, e $\gamma$ sei ecc.

A svolgere in serie $x$ può usarsi la formola di Lagrange che dà l'espressione di F($z$) quando si ha l'equazione

$$z = u + kf(z);$$

facendo

$$z = x^{2n}, \qquad f(z) = \frac{1}{x} = z^{-\frac{1}{2n}}, \qquad F(z) = x = z^{\frac{1}{2n}},$$

si avrà

$$x = u^{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\, ku^{-1} + \frac{1}{2n}\,\frac{k^2}{1.2}\,\frac{d(u^{-1-\frac{1}{2n}})}{du} + \frac{1}{2n}\,\frac{k^3}{1.2.3}\,\frac{d^2(u^{-1-\frac{2}{2n}})}{du^2} + \cdots;$$

e ponendo infine $u = 1$ si otterrà la radice $x$ della proposta equazione trinomia, cioè

$$x = 1 + \frac{1}{2n}k - \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\frac{k^2}{1.2} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{2}{2n}\right)\left(2 + \frac{2}{2n}\right)\frac{k^3}{1.2.3} - \ldots$$

Questi quattro termini si troveranno pure nella espressione di $\alpha$, ma il quinto sarà diverso. Per assicurarsene si differenzi cinque volte l'equazione

$$(b - a)(\alpha - c) = (b - c)(b - \alpha):$$

indicando con apici le derivate si avrà

$$\begin{gathered}(b - a)(\alpha^{\text{v}} - c^{\text{v}}) + 5(b' - a')(\alpha^{\text{iv}} - c^{\text{iv}}) + 10(b'' - a'')(\alpha''' - c''') + \\ 10(b''' - a''')(\alpha'' - c'') + 5(b^{\text{iv}} - a^{\text{iv}})(\alpha' - c') + (b^{\text{v}} - a^{\text{v}})(\alpha - c) = \\ (b - c)(b^{\text{v}} - \alpha^{\text{v}}) + 5(b' - c')(b^{\text{iv}} - \alpha^{\text{iv}}) + 10(b'' - c'')(b''' - \alpha''') + \\ 10(b''' - c''')(b'' - \alpha'') + 5(b^{\text{iv}} - c^{\text{iv}})(b' - \alpha') + (b^{\text{v}} - c^{\text{v}})(b - \alpha),\end{gathered}$$

che nel caso di $k = 0$ diverrà

$$\begin{gathered}(b' - a')(\alpha^{\text{iv}} - c^{\text{iv}}) + 2(b'' - a'')(\alpha''' - c''') \\ = 2(b'' - c'')(b''' - \alpha''') + 2(b''' - c''')(b'' - c''),\end{gathered}$$

poichè allora

$$\alpha = a = b = c, \qquad \alpha' = b' = c', \qquad \alpha'' = c''.$$

Sarà facile calcolare $a'$, $b'$, $a''$, $b''$, $c''$, $b'''$, $c'''$, $\alpha'''$ nel caso supposto di $k=0$: si troverà pure $c^{\text{iv}}$ o svolgendo in serie le espressioni (2) o ricorrendo alle regole per differenziare le funzioni di funzioni, e poscia l'equazione precedente darà $\alpha^{\text{iv}}$. Il termine cercato sarà $\alpha^{\text{iv}}.\dfrac{k^4}{1.2.3.4}$: giusta la serie testè riferita, la quarta derivata $x^{\text{iv}}$ nel caso di $k = 0$ sarebbe

$$x^{\text{iv}} = -\frac{1}{2n}\left(1 + \frac{3}{2n}\right)\left(2 + \frac{3}{2n}\right)\left(3 + \frac{3}{2n}\right),$$

e confrontando si troverà

$$\alpha^{\text{IV}} - x^{\text{IV}} = \frac{3}{2n^4(2n+1)^2}.$$

Ciò conferma che le espressioni di $x$ e $\alpha$ per serie differiscono nel quinto termine, e mostra ancora che la soluzione di Berndtson è falsa conducendo ad una derivata $\alpha^{\text{IV}}$ diversa dalla vera $x^{\text{IV}}$.

Se in luogo di supporre $a = \sqrt[2n+1]{1+k}$ si prende $a = \sqrt[2n]{1+k}$, risulterà

$$x < a, \quad x > b, \quad x < c, \text{ ecc.}$$

indi $\alpha < \beta < \gamma \dots$, i termini di ciascuna delle serie $a$, $b$, $c$, .... , $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... si accosteranno ancora ad $x$ indefinitamente, ma essendo la seconda crescente, i suoi termini saranno inferiori e non superiori ad $x$. D'altra parte, svolti questi valori secondo le potenze ascendenti di $k$, $a$ avrà comuni con $x$ i due primi termini $1+\frac{k}{2n}$, quindi $b$ avrà tre termini esatti, $c$ quattro, ecc., $\alpha$ ne avrà cinque, $\beta$ sei, $\gamma$ sette, ecc. Adunque in questa ipotesi la formola (1) darà un termine esatto di più che non ne somministra nella soluzione del Berndtson.



## APPLICAZIONE DI UNA FORMOLA D'INTEGRALE DEFINITO MULTIPLO ALL'INTEGRAZIONE DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI, E A COEFFICIENTI COSTANTI

**DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.**

1.° Nel vol. 4.° degli *Exercices d'analyse, et de physique Mathématique* del Sig. Cauchy alla pag. 144 si trova segnata con il numero (35) la seguente formola d'integrale definito multiplo

$$\mathrm{f}(k)=\frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\mathrm{D}_t^{\frac{n-1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}t^{\frac{n-2}{2}}\theta\mathrm{f}(\omega\sqrt{t})\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1}$$

ove $\mathrm{f}(k)$ rappresenta una funzione pari sviluppabile secondo le potenze ascendenti di $k^2$, che per $n$ costanti denotate con $a$, $b$, $c \ldots h$ si ha

$$k^2=a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2.$$

Di più ponendo

$$\alpha_1=\cos\varphi_1\,,\ \alpha_2=\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2\,,\ldots\ \alpha_{n-1}=\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}$$

$$\alpha_n=\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\ldots\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}$$

si ha

$$\theta=\operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1\operatorname{sen}^{n-3}\varphi_2\ldots\operatorname{sen}^2\varphi_{n-3}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}$$

$$\omega=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+\ldots+h\alpha_n\,,$$

Entro le quantità $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n$ si ha la relazione $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=1$. Di più gli angoli $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... $\varphi_{n-2}$ sono presi nell'integrale fra i limiti $0$, e $\pi$, mentre per l'angolo $\varphi_{n-1}$ i limiti sono $\pi$, e $-\pi$: il numero $n$ dovrà essere impari, ed eseguite le derivazioni rispetto a $t$ si farà $t=1$. Ciò posto veniamo a far conoscere con la maggior brevità possibile, come la precedente formola possa utilizzarsi per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali.

2.° Estendiamo per induzione la riportata formola al caso, che $\mathrm{f}(k)$ sia sviluppabile secondo le potenze di $k^{-2}$, è chiaro, che in ambedue le ipotesi, il valore di $\mathrm{f}(k)$ serve a trasformare una funzione pari del radicale $(a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2)^{\frac{1}{2}}$ in un integrale multiplo, di cui ciascun elemento considerato come funzione delle $a$, $b$, $c$, ... $h$ dipenderà da una funzione lineare $\omega$ delle medesime $a$, $b$, $c$, ... $h$. Di più le quantità $a$, $b$, $c$ ... $h$ sono indipendenti dalle altre $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_n$ per cui il valore di $\mathrm{f}(k)$ sussisterà, quando anche per $a$, $b$, $c$ ... $h$ si sostituissero delle caratteristiche. Così se

per esse si volessero rappresentare altrettanti simboli di derivazione riferiti ad $n$ variabili $x, y, z \dots w$, in modo da essere

$$k^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 + \dots + D_w^2$$

allora l'espressione indicata per $f(k)$ dipenderà, mediante il valore dell'integrale da un' altra operazione simbolica, nella quale le caratteristiche sono ridotte alla forma lineare. Ora questa riduzione è della più grande utilità nel calcolo integrale dell'equazioni a derivate parziali, e riservandomi in appresso di sviluppare maggiormente questo importante argomento, mi limiterò presentemente ad indicarne l' applicazione ad un qualche caso particolare.

3.° Sia per esempio da integrarsi l'equazione

$$(1) \qquad (AD_x^2 + BD_y^2 + CD_z^2 + \dots + HD_w^2)^m \varphi = f(x, y, z \dots w)$$

ove A, B, C ... H sono $n$ costanti: per l'analogia delle potenze con le differenze, l'integrale simbolico sarà

$$\varphi = \left(\frac{f(x, y, z \dots w)}{AD_x^2 + BD_y^2 + CD_z^2 + \dots + HD_w^2)^m}\right.$$

Quindi prendendo $f(k) = k^{-2m}$, e nello stesso tempo

$$k^2 = AD_x^2 + BD_y^2 + CD_z^2 + \dots + HD_w^2$$

si avrà

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} t^{\frac{n-2-2m}{2}} \theta\psi \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-2} \, d\varphi_{n-1}$$

ove $\psi$ rappresenta l'integrale dell'equazione

$$(2) \qquad (\alpha_1\sqrt{A}.D_x + \alpha_2\sqrt{B}.D_y + \dots + \alpha_n\sqrt{H}.D_w)^{2m} \psi = f(x, y, z \dots w)$$

e perciò determinato l'integrale dell'equazione (2), verrà determinato l'integrale dell'equazione (1). Da questo solo esempio si scorge, come gli integrali dell'equazioni a derivate parziali del second'ordine dipendono dagli integrali di quelle del primo, e così successivamente, gli integrali di equazioni del quart'ordine si ridurranno ad integrali di equazioni del second' ordine, e si potrà dunque concludere che integrata l'equazione

$$(AD_x + BD_y + \dots + HD_w)^m = f(x, y, z \dots w)$$

saranno integrate tutte le altre equazioni somiglianti, ove l'ordine delle caratteristiche sia una potenza di 2. Chi desiderasse un maggior sviluppo di questa teorica pel caso di tre variabili indipendenti $x, y, z$, potrà consultare una mia Memoria pubblicata nel 1854 nel vol. 25° delle Memorie della Società Italiana delle Scienze di Modena.

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

## SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE PEL RISULTANTE DI DUE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

BORCHARDT — Über ein die Elimination betreffendes Problem.
(Monatsbericht der Akademie zu Berlin. Mai. 1859).

Il Sig. Borchardt nell'articolo sucitato dà una elegante soluzione del seguente problema :

« Supponendo noti i valori di due polinomj $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dell'ennesimo grado, corrispondenti ai valori $\alpha_0$, $\alpha_1$, .... $\alpha_n$ della $x$; determinare in funzione delle quantità $\varphi(\alpha_0)$, $\varphi(\alpha_1)$ .... ; $\psi(\alpha_0)$, $\psi(\alpha_1)$ .... il risultato della eliminazione della $x$ dalle equazioni $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. »

1° È noto (*) che posto :

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x)}{x - y} = \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s\, a_{r,s}\, x^r\, y^s$$

il risultante delle equazioni $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ è il determinante :

$$\Delta = \sum (\pm a_{0,0}\, a_{1,1} \ldots a_{n-1,n-1}).$$

Si indichino con $x_1$, $x_2$ .... $x_n$ $n$ quantità qualsivogliano, e ponendo per brevità :

$$p_r(x_s) = a_{0,r} + a_{1,r}\, x^1 + a_{2,r}\, x_s^2 + \ldots + a_{n-1,r}\, x_s^{n-1}$$

dal prodotto del determinante $\Delta$ pel determinante :

$$\mathrm{X} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \ldots\ldots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 \ldots\ldots x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & x_n \ldots\ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

si avrà

$$\Delta\mathrm{X} = \begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \ldots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \ldots & p_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1}(x_1) & p_{n-1}(x_2) & \ldots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

(*) Questo teorema è dovuto a Cayley. — Vedi Sylvester — On a Theory of the Syzy-getic relations etc. Philosophical Transactions. Vol. 143. Parte 3. pag. 516.

Indicando con $y_1$, $y_2 \dots y_n$ altre $n$ quantità, e con Y il determinante formato con esse come l' X lo è colle $x_1$, $x_2 \dots x_n$; moltiplicando quest'ultimo determinante per Y si ottiene:

$$(1) \qquad \Delta XY = \sum \left[ \pm F(x_1, y_1) F(x_2, y_2) \dots F(x_n, y_n) \right].$$

2° Sia:

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

si ha come è noto:

$$\varphi(x) = f(x) \sum_0^n {}_r \frac{\varphi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r) f'(\alpha_r)}, \qquad \psi(x) = f(x) \sum_0^n {}_r \frac{\psi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r) f'(\alpha_r)}$$

quindi

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2} f(x) f(y) \sum_0^n {}_r \sum_0^n {}_s \frac{\alpha_r - \alpha_s}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s)} \cdot \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r)(x - \alpha_s)(y - \alpha_r)(y - \alpha_s)}.$$

Da questa espressione di $F(x, y)$ si deducono facilmente le:

$$(2) \begin{cases} F(\alpha_r, \alpha_s) = F(\alpha_s, \alpha_r) = \dfrac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{\alpha_s - \alpha_r} \\ F(\alpha_r, \alpha_r) = -\sum_0^n {}_s \dfrac{f'(\alpha_r)}{f'(\alpha_s)} \cdot \dfrac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{\alpha_s - \alpha_r} = -\sum_0^n {}_s \dfrac{f'(\alpha_v)}{f'(\alpha_r)} F(\alpha_r, \alpha_s) \end{cases}$$

nell'ultima delle quali la sommatoria non comprende il termine per cui $s = r$. Ponendo:

$$(3) \qquad \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s) (\alpha_s - \alpha_r)} = (rs)$$

si avrà per la prima delle (2):

$$(rs) = \frac{F(\alpha_r, \alpha_s)}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s)}$$

e per la seconda:

$$(rr) = \frac{F(\alpha_r, \alpha_r)}{f'^2(\alpha_r)} = -\sum_0^n {}_s (rs)$$

ossia:

$$(r0) + (r1) + (r2) + \dots + (rn) = 0$$

per $r = 0, 1, 2, \dots n$.

3° Se nella equazione (1) poniamo

$$x_1 = y_1 = \alpha_1; \qquad x_1 = y_2 = \alpha_2 \dots x_n = y_n = \alpha_n$$

od indichiamo con $\Pi(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ la espressione:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

si avrà:

$$\Delta \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \sum \left[ \pm F(\alpha_1, \alpha_1) F(\alpha_2, \alpha_2) \dots F)\alpha_n, \alpha_n) \right]$$

o sostituendo :

$$\Delta \Pi^2(\alpha_1 , \alpha_2 \dots \alpha_n) = f'^2(\alpha_1) f'^2(\alpha_2) \dots f'^2(\alpha_n) \sum [ + (11)(22) \dots (nn) ]$$

e quindi :

$$\Delta = \Pi^2(\alpha_0 , \alpha_1 , \dots \alpha_n) \sum [ \pm (11)(22) \dots (nn) ] ;$$

nella quale formola è contenuta la soluzione del problema.

Questa formola comprende quella di Eulero come caso particolare; infatti supponendo che le $\alpha_1 , \alpha_2 \dots \alpha_n$ sieno le radici dell'equazione $\psi(x) = 0$ dalla (3) si ha $(rs) = 0$ per tutti i valori di $r$, $s$ maggiori di zero e disuguali; quindi la (4) darà $(rr) = -(r0)$ e la formola superiore riducesi alla :

$$\Delta = (-1)^n \Pi^2(\alpha_0 , \alpha_1 \dots \alpha_n)(10)(20) \dots (n0)$$

ed osservando che per la (3) supposto

$$\psi(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

si ha :

$$(r0) = A \frac{\varphi(\alpha_r)}{(\alpha_0 - \alpha_r) f'(\alpha_r)} , \qquad (r > 0)$$

si otterrà la nota formola :

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A^n \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n) .$$

Prof. F. Brioschi.

---

# PUBBLICAZIONI RECENTI

Salmon — Lessons, Introductory to the Modern Higher Algebra. *Dublin.* 1859.

Lamé — Leçons sur les coordonnés curvilignes et leurs diverses applications. *Paris.* 1859.

Hermite — Sur la théorie des équations modulaires, et la résolution de l'équation du cinquième degré in 4.° *Paris.* 1859.

Dupré — Examen d'une proposition de Legendre relative a la théorie des nombres. in 8.° *Paris.* 1859.

Plana — Mémoire sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la terre, entre les centres de la lune, et de la terre supposés fixes immédiatement après l'impulsion in 4.° *Turin.* 1859.

Plana — Réflexions nouvelles sur deux mémoires de Lagrange publiés de en 1769 in 4.° *Turin.* 1859.

# LA TEORICA DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI DELLE FORME BINARIE E LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI.

## MONOGRAFIA

**DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.**

(Continuazione V. pag. 85).

### CAP.° V.° DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI NON LEGATI FRA LORO DA RELAZIONI LINEARI.

1.° Eulero, nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri (*), ha dimostrato, che il numero dei modi in cui un numero $s$ può esser formato da una somma di $r$ termini della serie 0, 1, 2, .... $n$; (supponendo che ciascun elemento possa essere ripetuto un indefinito numero di volte), è eguale al coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione :

$$Z = \frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\,....\,(1-x^nz)}\,.$$

Supponiamo :

$$Z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \,....$$

Cambiando la $x$ in $xz$ si ha :

$$(1-z)Z = (1-x^{n+1}z)(1 + A_1 xz + A_2 x^2 z^2 + \,...)\,,$$

e dal confronto dei coefficienti delle potenze di $z$ :

$$A_r(1-x^r) = A_{r-1}(1-x^{n+r})$$

dalla quale :

$$(50) \qquad A_r = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\,....\,(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\,....\,(1-x^r)}\,.$$

Se quindi col simbolo $P(s, r, n)$ indichiamo il numero dei termini di una funzione omogenea del grado $r$, omogenea in indice dell' ordine $s$, e formata cogli elementi $a_0$, $a_1$, $a_2$ .... $a_n$ si avrà evidentemente :

$$(51) \quad P(s, r, n) = \text{coefficiente di } x \text{ nello sviluppo di } \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})....(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\,....\,(1-x^r)}\,.$$

2.° La espressione del secondo membro dell'equazione (50) non cambia di valore

(*) Introductio in Analysin infinitorum. Caput XVI.

permutando gli esponenti $r$, $n$; cioè indicando quella espressione con $\psi(x)$ si ha:

$$\psi(x)=\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})\dots(1-x^{r+n})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)};$$

inoltre la funzione $\psi(x)$ soddisfa all'equazione:

$$x^{nr}\,\psi(\tfrac{1}{x})=\psi(x);$$

quindi si hanno per la funzione $P(s, r, n)$ le seguenti proprietà:

$$(52)\qquad P(s,r,n)=P(s,n,r)$$

$$(53)\qquad P(s,r,n)=P(nr-s,r,n)$$

alle quali possiamo aggiungere la:

$$(54)\qquad P(s,r,n)=0 \quad \text{per} \quad s>rn.$$

Un'altra interessante proprietà della stessa funzione ottiensi osservando che:

$$x^r\,\psi(x)=\frac{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})\dots(1-x^{n+r+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}-\frac{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})\dots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{r-1})}$$

per cui:

$$P(s,r,n)=P(s+r,\ r,\ n+1)-P(s+r,\ r-1,\ n+1)$$

o cambiando la $s$ in $s-r$ e la $n$ in $n-1$:

$$P(s,r,n)-P(s,\ r-1,n)=P(s-r,\ r,\ n-1)$$

dalla quale:

$$(55)\qquad P(s,r,n)=\sum_0^r{}_m\,P(s-m,\ m,\ n-1).$$

Da ultimo nello sviluppo della funzione:

$$(56)\qquad (1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^rz)=1+B_1z+B_2z^2+\dots+B_rz^r$$

si ottiene come superiormente:

$$(1-x^m)\,B_mz=-B_{m-1}\,x^m(1-x^{r-m+1})$$

ed in conseguenza:

$$B_m=(-1)^m\,x^{\frac{1}{2}m(m+1)}\,\frac{(1-x^{r-m+1})(1-x^{r-m+2})\dots(1-x^r)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)},$$

Ora sostituendo questo valore nella (56) e ponendo $z=x^n$ si ha:

$$(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{n+r})=\sum_0^r{}_m(-1)^m x^{mn+\frac{1}{2}m(m+1)}\,\frac{(1-x^{r-m+1})\dots(1-x^r)}{(1-x)\dots(1-x^m)};$$

quindi per la (51) sarà

(57) $$P(s, r, n) = \sum_{0}^{r} {}_m(-1)^m \text{ coefficiente di } x^s \text{ in}$$

$$\frac{x^{mn+\frac{1}{2}m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^m)} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^{r-m})},$$

od anche:

$$P(s, r, n) = \sum_{0}^{r} {}_m(-1) \text{ coefficiente di } x^\alpha \text{ in}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-m})}$$

essendo $\alpha = s - mn$. Osserviamo che per l'equazione (53) si potranno avere tutti i valori di $P(s, r, n)$ allorquando si conoscano quelli pei quali sia $s$ non $>$ di $\frac{1}{2}rn$; quindi se indichiamo con $p$ un numero che è pari se lo è il prodotto $rn$; e dispari nel caso contrario, e poniamo nella formola superiore $s = \frac{1}{2}(nr-p)$ si avrà

(58) $$P[\tfrac{1}{2}(nr-p), r, n] = \sum_{0}^{r} {}_m(-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in}$$

$$\frac{x^\rho}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-m})}$$

essendo $\gamma = \frac{1}{2}(r-2m)$, $\rho = \frac{1}{2}[p + m(m+1)]$. Ora è evidente che i termini della sommatoria del secondo membro corrispondenti a valori di $m$ pei quali risulta $n\gamma - \rho < 0$ sono eguali a zero; quindi la sommatoria medesima potrà estendersi pel caso di $r$ pari da $m = 0$ ad $m = \frac{1}{2}r - 1$, e pel caso $r$ dispari da $m = 0$ ad $m = \frac{1}{2}(r-1)$.

3°. Supponiamo $r$ pari e poniamo per brevità:

$$F(x) = (1-x)\ldots(1-x^m).(1-x)\ldots(1-x^{r-m})$$

si avrà:

$$P[\tfrac{1}{2}(nr-p), r, n] = \sum_{0}^{\frac{1}{2}r-1} {}_m(-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{x^\rho}{F(x)}.$$

Rappresentiamo con $1-x^a$, $1-x^b$, $1-x^c$, .... i fattori di $F(x)$, e siano $a_1$, $b_1$, $c_1$ .... i minimi multipli comuni ai numeri $a$, $b$, $c$ .... ed al numero $\gamma$; si avrà:

(59) $$\frac{(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})(1-x^{c_1})\ldots\ldots}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots\ldots} = \varphi(x)$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione intiera di $x$. Ossia ponendo:

*

$$f(x) = (1 - x^{a_1})(1 - x^{b_1})(1 - x^{c_1}) \ldots .$$

sarà :

$$\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

e :

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \sum_{0}^{\frac{1}{2}r-1}{}_m (-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{x^p \varphi(x)}{f(x)}.$$

Ora gli esponenti di $x$ nel polinomio $f(x)$ sono evidentemente multipli di $\gamma$; quindi nel polinomio $x^p\,\varphi(x)$ si potranno trascurare quei termini nei quali l'esponente della $x$ non è un multiplo di $\gamma$ giacchè i medesimi non influiscono sul valore del coefficiente di $x^{n\gamma}$. Indicando con $\lambda(x^\gamma)$ il polinomio risultante dal trascurare quei termini, e ponendo $f(x) = \mu(x^\gamma)$ si avrà :

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right) = \sum_{0}^{\frac{1}{2}r-1}{}_m (-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{\lambda(x^\gamma)}{\mu(x^\gamma)}$$

ossia :

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1}{}_m (-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n} \text{ in } \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

od anche :

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \text{coefficiente di } x^{n} \text{ in } \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1}{}_m (-1)^m \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}.$$

Se $r$ è dispari ponendo $x^2$ in luogo di $x$ nel secondo membro dell'equazione (58), si potrà anche in questo caso applicare la trasformazione superiore e si giungerà alla

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \text{coefficiente di } x^{n} \text{ in } \sum_{0}^{\frac{1}{2}(r-1)}{}_m (-1)^m \frac{\lambda_1(x)}{\mu_1(x)}$$

nella quale $\lambda_1(x)$, $\mu_1(x)$ sono due funzioni intere di $x$. Quindi tanto per $r$ pari, quanto per $r$ dispari si avrà l'equazione :

$$\mathrm{P}\left[\tfrac{1}{2}(nr - p), r, n\right] = \text{coefficiente di } x^{n} \text{ in } \frac{u(x)}{v(x)}$$

essendo $u(x)$ una funzione intiera di $x$, e $v(x)$ il prodotto di fattori della forma $1 - x^\theta$. (*)

*Esempio.* Sieno $r = 4$, $p = 2$ l'equazione (58) darà :

*) Cayley — Researches on the Partition of Numbers. Philosophical Transactions — 1855,

$$P\left[\tfrac{1}{2}(4n-2),\,4,\,n\right] = \text{coefficiente di } x^{2\nu} \text{ in } \frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$- \text{ coefficiente di } x^{\nu} \text{ in } \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Per ridurre la prima frazione osserviamo che essendo ordinatamente 2, 2, 6, 4 i minimi multipli comuni ai numeri 1, 2, 3, 4 ed al numero 2 si ha:

$$\frac{(1-x^2)^2(1-x^6)(1-x^4)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{(1-x^2)(1-x^6)}{(1-x)(1-x^3)} = 1 + x + x^3 + x^4$$

quindi la prima frazione equivale alla:

$$\frac{x(1+x+x^3+x^4)}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)};$$

e trascurando i termini del numeratore nei quali gli esponenti della $x$ non sono multipli di due, si giungerà alla:

$$P(2n-1,\,4,\,n) = \text{coefficiente di } x^{\nu} \text{ in } \frac{x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$- \text{ coefficiente di } x^{\nu} \text{ in } \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$$

o riducendo:

$$P(2n-1,\,4,\,n) = \text{coefficiente di } x^{\nu} \text{ in } \frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

4º La espressione $\varphi(x)$ [equazione (59)] si può ottenere nel seguente modo. Posto:

$$(60)\qquad \varphi(x) = \frac{(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})\,....}{(1-x^a)(1-x^b)\,....} = 1 + C_1x + C_2x^2 + \,....\, + C_i\,x^i$$

Si indichino con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .... le radici dell'equazione:

$$(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\,.... = 0$$

e con $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ .... quelle della:

$$(1-x^{a_1})(1-x^{b_1})(1-x^{c_1})\,..... = 0;$$

ora indicando con $s_m$ la espressione:

$$\frac{1}{\alpha_1^m} + \frac{1}{\beta_1^m} + \frac{1}{\gamma_1^m} + \,....\, - \frac{1}{\alpha^m} - \frac{1}{\beta^m} - \frac{1}{\gamma^m}\,....$$

si ha facilmente:

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=1+s_1x+s_2x^2+s_3x^3+\ldots\,,$$

quindi, deducendosi dalla (60) la :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{C_1+2C_2x+3C_3x^2+\ldots}{1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots}$$

si avranno le seguenti relazioni :

$$(61)\quad\begin{cases} C_1+s_1=0\\ 2C_2+C_1s_1+s_2=0\\ 3C_3+C_2s_2+C_1s_2+s_3=0\\ 4C_4+C_3s_1+C_2s_2+C_1s_3+s_4=0 \text{ ec. } \ldots \end{cases}$$

I valori delle $s_1$, $s_2\ldots$ si ottengono, per una nota proprietà delle equazioni binomie, dalla seguente formola :

$$s_m=E\left(\frac{m}{a_1}\right)+E\left(\frac{m}{b_1}\right)+E\left(\frac{m}{c_1}\right)+\ldots-E\left(\frac{m}{a}\right)-E\left(\frac{m}{b}\right)-E\left(\frac{m}{c}\right)-\ldots$$

nella quale il simbolo $E\left(\frac{h}{k}\right)$ rappresenta una quantità che è nulla se $h$ non è divisibile esattamente per $k$ ed è eguale a $k$ nel caso contrario.

*Esempio.*

$$P\left(\tfrac{3}{2}n,3,n\right)=\text{coefficiente di } x^{3n} \text{ in } \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}$$

$$-\text{ coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{x^2}{(1-x^2)^2(1-x^4)}$$

o riducendo col metodo suesposto :

$$P\left(\tfrac{3}{2}n,3,n\right)=\text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{1+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)}$$

$$=\text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{1-x^8}{(1-x^2)^2(1-x^4)^2}$$

od anche supponendo $n$ pari :

$$P\left(\tfrac{3}{2}n,3,n\right)=\text{coefficiente di } x^{\frac{n}{2}} \text{ in } \frac{1-x^4}{(1-x)^2(1-x^2)^2}.$$

Ora ponendo :

$$\frac{1-x^4}{(1-x)^2(1-x^2)^2}=1+C_1x+C_2x^2+\ldots$$

i coefficienti $C_1$, $C_2$... saranno dati dalle formole (61) nelle quali:

$$s_m = E\left(\frac{m}{4}\right) - 2 - 2E\left(\frac{m}{2}\right)$$

ossia:

$$s_{2m+1} = -2, \quad s_{2(2m+1)} = -6, \quad s_{4(2m+1)} = -2,$$

quindi:

$$P(3, 3, 2) = C_1 = 2, \quad P(6, 3, 4) = C_2 = 5,$$
$$P(9, 3, 6) = C_3 = 8, \quad P(12, 3, 8) = C_4 = 13, \ldots.$$

5.° Supponiamo che la funzione omogenea del grado $r$ omogenea in indice dell' ordine $s$ e formata cogli elementi $a_0$, $a_1$, .... $a_n$ debba soddisfare all'equazione:

$$(62) \qquad a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{d}{da_n} = 0.$$

Operando col primo membro della equazione superiore sulla funzione data ottiensi evidentemente una funzione delle $a_0$, $a_1$ .... $a_n$ omogenea di grado $r$, di indice $s-1$, e quindi composta di un numero $P(s-1, r, n)$ di termini. Mediante l'equazione superiore si potrà in conseguenza determinare un numero $P(s-1, r, n)$ di coefficienti numerici della funzione proposta, e sarà:

$$Q(s, r, n) = P(s, r, n) - P(s-1, r, n)$$

il numero dei coefficienti indeterminati della medesima. Se a questi coefficienti indeterminati si danno dei valori arbitrarj si potranno ottenere moltissime forme differenti fra loro, ma di queste non saranno *indipendenti* che un numero $Q(s, r, n)$ essendo le altre legate ad esse per mezzo di equazioni lineari a coefficienti numerici.

Dunque il numero delle forme composte dagli elementi $a_0$, $a_1$ .... $a_n$ di grado $r$ e di indice $s$, le quali soddisfano all'equazione (62), e sono indipendenti cioè non legate da relazioni lineari è $Q(s, r, n)$. (*) Ora per la equazione (51) si ha:

$$Q(s, r, n) = \text{coefficiente di } x^s \text{ nello sviluppo di } \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{n+r})}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^r)}$$

quindi analogamente alle equazioni (52), (53), (55) si hanno le:

$$(63) \qquad \begin{gathered} Q(s, r, n) = Q(s, n, r), \qquad Q(s, r, n) = Q(nr-s, r, n) \\ Q(s, r, n) = \sum_0^r {}_m Q(s-m, m, n-1) \end{gathered}$$

(*) Cayley — A Second Memoir upon Quantics — Phylosophical Transactions.

ed analogamente alla (58)

(64) $$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-p), r, n\right]$$

$$=\sum_0^m (-1)^m \text{ coefficiente di } x^{n\gamma} \text{ in } \frac{x^\rho}{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{r-m})}.$$

Operando come al §. 3. per la funzione **P** si giungerà alla :

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-p), r, n\right] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{U(x)}{V(x)}$$

nella quale $U(x)$ è una funzione intiera di $x$ e $V(x)$ il prodotto di fattori della forma $1-x^\theta$.

6. Rammentando (Cap. 1. §. 1. — Cap. 3. §. 3.) che una funzione omogenea di grado $r$ delle $a_0$, $a_1$, $a_2 \ldots a_n$, la quale sia omogenea in indice dell'ordine $\frac{1}{2}nr$ e soddisfi all'equazione (62) è un invariante della forma dell'ennesimo grado, è chiaro che la espressione $Q(\frac{1}{2}nr, r, n)$ determinerà per quella forma il numero degli invarianti indipendenti del grado $r$. Così siccome una funzione omogenea di grado $r$ delle $a_0$, $a_1 \ldots a_n$, la quale sia omogenea in indice dell' ordine $\frac{1}{2}(nr-p)$ e soddisfi all'equazione (62) è il primo coefficiente di un covariante dell' ordine $p$ della forma dell'ennesimo grado; la espressione $Q\left[\frac{1}{2}(nr-p), r, n\right]$ darà per la forma medesima il numero dei covarianti indipendenti di grado $r$ e di ordine $p$. Quindi se $nr$ è pari il numero totale degli invarianti e dei covarianti indipendenti di grado $r$ della forma dell'ennesimo grado sarà :

$$Q(\tfrac{1}{2}nr, r, n) + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-2), r, n\right] + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-4), r, n\right] + \ldots\ldots$$
$$+ Q(1, r, n) = P(\tfrac{1}{2}nr, r, n)$$

e nel caso di $nr$ dispari il numero totale dei covarianti indipendenti di grado $r$ della forma stessa sarà :

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n\right] + Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-3), r, n\right] + \ldots\ldots$$
$$+ Q(1, r, n) = P\left[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n\right].$$

Osserviamo che essendo (63) :

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(nr-p), r, n\right] = Q\left[\tfrac{1}{2}(rn-p), n, r\right]$$

la espressione $Q\left[\frac{1}{2}(nr-p), r, n\right]$ rappresenterà tanto il numero dei covarianti indipendenti di grado $r$ e di ordine $p$ della forma dell'ennesimo grado; quanto quello dei covarianti indipendenti di grado $n$ e di ordine $p$ della forma dell'erresimo grado. Talchè può dirsi che ad ogni covariante d' ordine $p$ e di grado $r$ della forma di grado $n$ corrisponde un covariante d'ordine $p$ e di grado $n$ della forma di grado $r$.

Questa proprietà dei covarianti la quale vale evidentemente anche per gli invarianti viene denominata *legge di reciprocità*.

7.° Le Tabelle A, B, C .... seguenti furono calcolate coi metodi esposti ai §$^{i}$. 2.°, 3.°, 4.° Dalla Tabella A essendo :

$$Q(n, 2, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } 1 + x^2 + x^4 + \ldots.$$

deducesi che tutte le forme di grado pari hanno uno, ed un solo, invariante quadratico (Cap.° 1.° §.° 4.°). Dalla stessa Tabella essendo :

$$Q(n, 3, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } 1 + x^4 + x^8 + \ldots$$

Si ha che le sole forme di grado $\equiv 0$ (mod. 4) hanno *un* invariante cubico; quindi per la legge di reciprocità la forma cubica avrà un invariante di quarto grado ( il discriminante di quella forma), uno di grado ottavo ( il quadrato del discriminante) ec. . . . .

Dalla Tabella B si ha :

$$Q(n-1, 2, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots.$$

quindi tutte le forme di grado dispari avranno uno , ed un solo covariante di secondo grado e di secondo ordine. Così per la medesima tabella essendo :

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(3n-2), 3, n\right] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } x^2(1 + x^4 + x^8 + \ldots)$$

$$Q(2n-1, 4, n) = 0$$

deducesi che le sole forme di grado $\equiv 2$ (mod. 4) hanno *un* covariante di terzo grado e di secondo ordine, e che nessuna forma binaria ha covariante di quarto grado e di secondo ordine.

Dalla Tabella C si avrà che tutte le forme di grado pari hanno uno, ed un solo, covariante di secondo grado e di quarto ordine ; che le sole forme di grado $\equiv 0$ (mod. 4) hanno *un* covariante di terzo grado e di quarto ordine ; e che le forme dei gradi $3m$, $3m-1$ , $3m-2$ hanno ciascuna $m$ covarianti di quarto grado e di quarto ordine.

Dalla Tabella G essendo :

$$Q\left[\tfrac{1}{2}(3n-1), 3, n\right] = 0$$

deducesi che nessuna forma può avere covariante lineare e di terzo grado; e reciprocamente che la forma cubica non ha covariante lineare.

Da ultimo dalle Tabelle N, P si ha che il numero totale degli invarianti e dei covarianti di secondo grado per le forme dei gradi $2m$, $2m+1$ è $m+1$; e che il numero totale dei covarianti di terzo grado per una forma di grado $2m+1$ è $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

*Tabella* A.

$Q(\frac{1}{2}nr, r, n)$ = coefficiente di $x^n$ in $A(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $A(n)$

$$A(2) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots\cdots$$

$$A(3) = \frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + \cdots\cdots$$

$$A(4) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$A(5) = \frac{1-x^{36}}{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{18})}$$

$$A(6) = \frac{1-x^{30}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{15})}$$

$$A(7) = \frac{1-x^6+2x^8-x^{10}+5x^{12}+2x^{14}+6x^{16}+2x^{18}+5x^{20}-x^{22}+2x^{24}-x^{26}+x^{32}}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})}$$

$$A(8) = \frac{(1-x)(1+x-x^3-x^4+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}-x^{12}-x^{13}+x^{15}+x^{16})}{(1-x^2)^2(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)(1-x^7)}$$

---

*Tabella* B.

$Q[\frac{1}{2}(nr-2), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $B(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $B(n)$

$$B(2) = \frac{x}{1-x^2} = x(1 + x^2 + x^4 + \ldots.)$$

$$B(3) = \frac{x^2}{1-x^4} = x^2(1 + x^4 + x^8 + \ldots.)$$

$$B(4) = 0$$

$$B(5) = \frac{x^2(1-x^{12})}{(1-x^4)^2(1-x^6)(1-x^8)}$$

$$B(6) = \frac{x^3}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^5)}$$

---

*Tabella* C.

$Q[\frac{1}{2}(nr-4), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $C(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $C(n)$

$$C(2) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2(1 + x^2 + x^4 + \ldots.)$$

$$C(3) = \frac{x^4}{1 - x^4} = x^4(1 + x^4 + x^8 + \ldots .)$$

$$C(4) = \frac{x}{(1-x)(1-x^3)} = x(1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \ldots .$$
$$+ mx^{3m-3} + mx^{3m-2} + mx^{3m-1} + \ldots )$$

$$C(5) = \frac{x^4(2 + x^2 + 2x^4)}{(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

$$C(6) = \frac{x^2}{(1 - x^2)^2(1 - x^3)(1 - x^4)}$$

---

*Tabella* D.

$Q[\frac{1}{2}(nr - 6), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $D(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $D(n)$

$$D(2) = \frac{x^3}{1 - x^2} = x^3(1 + x^2 + x^4 + \ldots .)$$

$$D(3) = \frac{x^2(1 - x^6)}{(1 - x^2)(1 - x^4)} = x^2(1 + x^2 + 2x^4 + x^6 + 2x^8 + x^{10} + 2x^{12} + \ldots .)$$

$$D(4) = \frac{x^3}{(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$D(5) = \frac{x^2(1 - x^5)}{(1 - x)(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

$$D(6) = \frac{x(1 - x^7)}{(1 - x^2)^2(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

---

*Tabella* E.

$Q[\frac{1}{2}(nr - 8), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $E(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $E(n)$

$$E(2) = \frac{x^4}{1 - x^2} = x^4(1 + x^2 + x^4 + \ldots .)$$

$$E(3) = \frac{x^4(1 - x^6)}{(1 - x^2)(1 - x^4)}$$

$$E(4) = \frac{x^2}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$E(5) = \frac{x^4(2 + 2x^2 + 2x^4 - 3x^8 - 3x^{10} - 3x^{12} + x^{16})}{(1 - x^4)^2(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

$$E(6) = \frac{x^2(1 - x^3)}{(1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

*Tabella* F.

$Q[\frac{1}{2}(nr-10), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $F(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $F(n)$

$$F(2)=\frac{x^5}{1-x^2}$$

$$F(3)=\frac{x^6(1-x^6)}{(1-x^2)(1-x^4)}$$

$$F(4)=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^3)}$$

$$F(5)=\frac{x^2(1+x^2+3x^4+3x^6+4x^8+x^{10}-x^{14}-x^{16})}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}$$

$$F(6)=\frac{x^3(1-x^3-x^4)}{(1-x^2)^2(1-x^3)(1-x^4)}$$

---

*Tabella* G.

$Q[\frac{1}{2}(nr-1), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $G(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $G(n)$

$$G(3)=0$$

$$G(5)=\frac{x^5}{(1-x^2)(1-x^6)(1-x^8)}$$

---

*Tabella* H.

$Q[\frac{1}{2}(nr-3), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $H(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $H(n)$

$$H(3)=\frac{x}{1-x^2}=x(1+x^2+x^4+\ldots.)$$

$$H(5)=\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}$$

---

*Tabella* K.

$Q[\frac{1}{2}(nr-5), r, n]$ = coefficiente di $x^n$ in $K(r)$ = coefficiente di $x^r$ in $K(n)$

$$K(3)=\frac{x^3}{1-x^2}=x^3(1+x^2+x^4+\ldots.)$$

$$K(5)=\frac{x(1-x^{12})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}$$

*Tabella* L.

$$Q[\tfrac{1}{2}(nr-7), r, n] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } L(r) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } L(n)$$

$$L(3) = \frac{x^5}{1-x^2} = x^5(1+x^2+x^4+\ldots.)$$

$$L(5) = \frac{x^3(1+x^2-2x^6-x^8+2x^{14}+x^{16}-x^{18})}{(1-x^2)(1-x^4)^2(1-x^6)(1-x^8)}$$

*Tabella* M.

$$Q[\tfrac{1}{2}(nr-9), r, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } M(r) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } M(n)$$

$$M(3) = \frac{x^3(1-x^8)}{(1-x^2)(1-x^4)}$$

$$M(5) = \frac{x^3(1+3x^2+2x^4-2x^8-3x^{10}-x^{12}-x^{14}+x^{18})}{(1-x^4)^2(1-x^6)(1-x^8)}$$

*Tabella* N.

$$P(\tfrac{1}{2}nr, r, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } N(r) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } N(n)$$

$$N(2) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = 1+x+2x^2+2x^3+\ldots+(m+1)x^{2m}+(m+1)x^{2m+1}+\ldots$$

$$N(3) = \frac{1-x^8}{(1-x^2)^2(1-x^4)^2}$$

$$N(4) = \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2}$$

$$N(5) = \frac{1+x^2+6x^4+9x^6+12x^8+9x^{10}+6x^{12}+x^{14}+x^{18}}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}$$

$$N(6) = \frac{1+x^2+3x^3+4x^4+4x^5+4x^6+3x^7+x^8+x^{10}}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

*Tabella* P.

$$P[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n] = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } P(r) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } P(n)$$

$$P(3) = \frac{x}{(1-x)^3} = x\left(1+3x^2+6x^4+10x^6+\ldots+\frac{(m+1)(m+2)}{2}x^{2m}+\ldots\right)$$

$$P(5) = \frac{x(1+4x^2+8x^4+10x^6+10x^8+8x^{10}+4x^{12}+x^{14})}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}$$

## SUR LES LIGNES DE COURBURE DE LA SURFACE DES ONDES.

**PAR M^r. EDOUARD COMBESCURE.**

1. Les équations de la normale au point $x$, $y$, $z$ d'une surface quelconque peuvent s'ecrire :

$$x - X = R\lambda, \quad y - Y = R\mu, \quad z - Z = R\nu\,;$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ désignant les cosinus de direction de cette droite, et R la distance du point $x$, $y$, $z$ à un autre point quelconque X, Y, Z de la partie intérieure de cette même droite. Si ce dernier point est tel que en marchant sur la surface, la normale infiniment voisine rencontre la première au même point X, Y, Z, les équations précédentes devront subsister quand on fera varier infiniment peu $x$, $y$, $z$ et par suite $\lambda$, $\mu$, $\nu$, les autres quantités R, X, Y, Z restant constantes. On aura donc ainsi les équations suivantes des lignes de courbure :

$$(1) \qquad dx = Rd\lambda, \qquad dy = Rd\mu, \qquad dz = Rd\nu.$$

Ces équations se réduisent évidemment à deux, à cause de la relation

$$\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$$

et reproduisent par l'élimination de R l'équation ordinaire des lignes de courbure ; mais il peut-être avantageux de les conserver sous leur forme actuelle, comme cela parait avoir lieu dans la question particulière que j'ai en vue et dans toutes celles où l'équation de la surface renferme symetriquement les coordonnés $x$, $y$, $z$.

2. En posant :

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \alpha, \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = \beta,$$

$$a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2 = \gamma$$

l'équation de la surface des ondes est la suivante : (voir Lamé. th. de l'Elasticité, pag. 245)

$$f = \alpha\beta - \gamma + abc = 0$$

$a$, $b$, $c$ étant écrits ici pour plus de simplicité au lieu de $a^2$, $b^2$, $c^2$. En considérant dans les relations (2) $a$, $b$, $c$ comme positifs ou négatifs on donne lieu à deux variétés nouvelles de surfaces qui sont en quelque sorte à la surface des ondes ce que les hyperboloïde à une et à deux nappes sont pour les ellipsoïdes, du moins quant à certaines affections de forme dont je n'ai pas pour objet de m'occuper présentement pas plus que des surfaces du 4^me. ordre qui sont telles que les trois plans coordonnés

les coupent, chacun en particulier, suivantes deux courbes séparées du $2^{me}$ ordre, situées d'une manière quelconque dans ces plans, et dont l'étude n'est pas dépourvue d'intêret.

Des équations précédentes, on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\alpha\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}+\beta\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}=2x\left[\,a\alpha+\beta-a(b+c)\,\right]$$

et par suite :

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}\lambda&=\frac{x}{\mathrm{D}}\left[\,a\alpha+\beta-a(b+c)\,\right]\\ \mu&=\frac{y}{\mathrm{D}}\left[\,b\alpha+\beta-b(c+a)\,\right]\\ \nu&=\frac{z}{\mathrm{D}}\left[\,c\alpha+\beta-c(a+b)\,\right]\end{aligned}\right.$$

où nécessairement :

$$\mathrm{D}^2=\mathrm{S}x^2\left[\,a\alpha+\beta-a(b+c)\,\right]^2.$$

Si l'on pose abréger :

$$a+b+c=\mathrm{A}\,,\quad ab+bc+ca=\mathrm{B}\,,\quad abc=\mathrm{C}$$

et qu'on ait égard aux identités :

$$a^2=a\mathrm{A}-a(b+c)\,,\qquad a^2(b+c)=\mathrm{B}a-\mathrm{C}\,,$$
$$a^2(b+c)^2=\mathrm{B}a(b+c)+\mathrm{C}a-\mathrm{AC}\,,$$

qui entrainent :

$$(\alpha)\quad \mathrm{S}a^2x^2=\mathrm{A}\beta-\gamma\,,\quad \mathrm{S}a^2(b+c)x^2=\mathrm{B}\beta-\mathrm{C}\alpha\,,\quad \mathrm{S}a^2(b+c)^2x^2=\mathrm{B}\gamma+\mathrm{C}\beta-\mathrm{AC}\alpha\,,$$

on trouve facilement, en tenant compte de la relation $\gamma=\alpha\beta+\mathrm{C}$ :

$$\mathrm{D}^2=(\alpha\beta-\mathrm{C})(\beta-\alpha^2+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})\cdot$$

Des expressions précédentes des cosinus résulte tout de suite, en ayant égard aux identités $(\alpha)$ :

$$\mathrm{S}\lambda x=\frac{\alpha\beta-\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\,,\qquad \mathrm{S}a\lambda x=\frac{\beta}{\mathrm{D}}(\beta-\alpha^2+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})$$

ou, en prenant pour D un signe déterminé :

$$\mathrm{S}\lambda x=\sqrt{\frac{\alpha\beta-\mathrm{C}}{\beta-\alpha^2+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}}}\,,\qquad \mathrm{S}a\lambda x=\beta\sqrt{\frac{\beta-\alpha^2+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}}{\alpha\beta-\mathrm{C}}}.$$

Si l'on pose $p=\mathrm{S}\lambda x$, $p$ représente la longueur de la perpéndiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent, et la seconde des équations superieures donne :

$$Sa\lambda x = \frac{\beta}{p}$$

d'où

$$Sax\, d\lambda = d\frac{\beta}{p} - Sa\lambda\, dx .$$

Mais d'après les expressions (3) on a :

$$Sa\lambda\, dx = \frac{1}{2D}\left(\alpha\, dS\, a^2x^2 + \beta\, dSax^2 - dSa^2(b+c)x^2\right)$$

par conséquent en tenant compte des relations ($\alpha$) on obtient :

$$Sa\lambda\, dx = \frac{1}{2D}\left((\beta - \alpha^2 + A\alpha - B)d\beta - (\alpha\beta - C)d\alpha\right) = \frac{1}{2}\frac{d\beta}{p} - \frac{1}{2}p\, d\alpha .$$

D'ailleurs les équations (1) fournissent tout de suite :

$$Sax\, dx = R\, Sax\, d\lambda$$

ou :

$$\frac{1}{2}\, d\beta = R\, Sax\, d\lambda$$

donc en substituant :

$$d\beta = R\left(\frac{d\beta}{p} + p\, d\alpha - 2\beta\frac{dp}{p^2}\right).$$

En posant $p^2 = v$, $\frac{R}{\sqrt{v}} = \theta$ et en observant que :

$$dp = Sx\, d\lambda = \frac{1}{R}Sx\, dx = \frac{1}{2R}d\alpha$$

on a définitivement le groupe suivant relatif aux lignes de courbure de la surface des ondes :

$$(4) \qquad d\alpha = \theta\, dv , \quad d\beta = \theta\left(v\, d\alpha + \frac{v\, d\beta - \beta\, dv}{v}\right), \quad \beta = \frac{v(\alpha^2 - A\alpha + B) - C}{v - \alpha}$$

la dernière équation n'étant autre que celle qui définit $p^2$ ou $v$ résolue per rapport à $\beta$.

3. Si l'on pose $v = \text{const}^e$. , il resulte de ces équations $\alpha = \text{const}^e$. et aussi $\beta = \text{const}^e$. Mais l'hypothèse simultanée $\alpha = \text{const}^e$ , $v = \text{const}^e$. ne détermine généralement qu'un nombre limité de points sur la surface des ondes. Il faudrait pour que cette double hypothèse correspond réellement à une ligne de courbure que la valeur correspondante de $\beta$ fut indéterminée; ce qui n'a lieu que pour les trois valeurs simultanées et particulières $v = \alpha = a,\ b,\ c$ qui répondent aux trois sections circulaires données par les plans coordonnés. Les trois sections elliptiques , fournies

par les mêmes plans, doivent aussi satisfaire aux équations (4), ce qu'il est facile de vérifier. Si l'on fait effectivement $\beta = bc$, ce qui donne $x = 0$, les équations (4) deviennent :

$$d\alpha = \theta\, dv, \qquad v^2 d\alpha = bc\, dv \qquad \text{ou} \qquad d\frac{1}{v} = -\frac{d\alpha}{bc},$$

valeur qui satisfait à la troisième (4) laquelle devient ici $v = \dfrac{bc}{b+c-\alpha}$. Cette solution particulière comprend la solution circulaire, car en y faisant $\alpha = c$, elle redonne $v = c$. On connait ainsi les trois solutions particulières :

$$v = \frac{bc}{b+c-\alpha}, \quad v = \frac{ca}{c+a-\alpha}, \quad v = \frac{ab}{a+b-\alpha}$$

que doit reproduire l'intégrale générale en attribuant à la constante arbitraire trois valeurs particulières convenables.

Ce qui vient d'être dit fait voir que la surface développable circonscrite à la surface des ondes et à une sphère concentrique, surface pour laquelle $v$ et par suite $\alpha$ sont constants, ne peut pas toucher la surface des ondes suivant une ligne de courbure de celle ci, excepté pour les hypothèse particulières ci-dessus signalées. Ceci confirme une inexactitude signalée et mise hors de doute par M$^r$. Bertrand à la page 817 des *Comptes Rendus* (1858) et par M$^r$. Brioschi à la page 135 des *Annali di Matematica* (1859); inexactitude sur laquelle M$^r$. Cayley est revenu à son tour dans le n.° de mai 1859 du *Quarterly Journal*.

4. On déduit de la troisième équation (4) en designant par $\Pi$ un produit symetrique de trois facteurs :

$$d\beta = \frac{-dv\,\Pi(\alpha - a) + d\alpha\,\{(2\alpha - A)v^2 + (B - \alpha^2)v - C\}}{(v-\alpha)^2}$$

ou bien :

$$d\beta = \frac{-dv\,\Pi(\alpha - a) + d\alpha\,\{\Pi(v-a) - v(v-\alpha)^2\}}{(v-\alpha)^2}$$

d'où :

$$d\beta + v\,d\alpha = \frac{d\alpha\,\Pi(v-a) - dv\,\Pi(\alpha-a)}{(v-\alpha)^2}.$$

La première et la deuxième équations (4) donnent :

$$d\beta + v\,d\alpha = \theta\left\{d\beta + v\,d\alpha + \left(v - \frac{\beta}{v}\right)dv\right\}$$

et en éliminant $\theta$ par la première :

$$(d\beta + v\,d\alpha)(dv - d\alpha) = \left(v - \frac{\beta}{v}\right)dv\,d\alpha;$$

d'ailleurs :

$$v - \frac{\beta}{v} = \frac{(\alpha v^2 - C)(v - \alpha) - v\Pi(\alpha - a)}{\alpha v(v - \alpha)}.$$

D'après ces valeurs on aura pour l'équation isolée des lignes de courbure :

$$\overline{d\alpha}^2\,\Pi(v - a) + \overline{dv}^2\,\Pi(\alpha - a)$$

$$+ d\alpha\, dv \left\{ \frac{(v-\alpha)^2(\alpha v^2 - C)}{\alpha v} - \frac{v\Pi(\alpha - a) + \alpha\Pi(v - a)}{\alpha} \right\} = 0$$

ce qui se réduit à :

$$(5)\quad \overline{d\alpha}^2\,\Pi(v-a) + \overline{dv}^2\,\Pi(\alpha - a) + \frac{d\alpha\, dv}{v}\left\{ \alpha(-2v^3 + Av^2 - C) + Av^3 - 2Bv^2 + 3Cv \right\} = 0$$

ou, si on le préfère, en posant $v = \frac{1}{u}$, à

$$\overline{d\alpha}^2\, u\Pi(1 - au) + \overline{du}^2\,\Pi(\alpha - a) + du\, d\alpha \left\{ \alpha(Cu^3 - Au + 2) - 3Cu^2 + 2Bu - A \right\} = 0.$$

On peut considérer l'équation d'Euler relative à l'addition des fonctions elliptiques comme un cas particulier de celle-ci ou de cette autre plus générale :

$$F(u)\,\overline{d\alpha}^2 + F_1(\alpha)\,\overline{du}^2 + f(u, \alpha) du\, d\alpha = 0$$

où F, $F_1$, $f$ désigneraient des fonctions du 4$^{me}$. degré. Ce rapprochement et l'existence des solutions particulières que j'ai signalées, ainsi qu'une autre solution dont je vais dire bientôt un mot, pourraient porter à penser que l'intégrale générale est une fonction algébrique; mais jusqu'à plus ample information ceci ne doit être considéré que comme une simple induction.

En divisant par $\Pi(v - a)$ l'équation differentielle ci-dessus entre $\alpha$ et $v$ et decomposant ensuite en fractions simples le coefficient de $d\alpha\, dv$, on donne facilement à cette équation la forme suivant dont la symetrie *supérieure* et *inférieure*, si je puis m'exprimer ainsi, présente un type facile à retenir :

$$(6)\qquad \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 - \left(S\frac{\alpha - a}{v - a} - \frac{\alpha}{v}\right)\frac{d\alpha}{dv} + \Pi\frac{\alpha - a}{v - a} = 0.$$

Si l'on considère $v$ et $\alpha$ comme l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe plane, et que l'on prenne sur la bissectrice de l'angle des axes positifs des coordonnées O$v$ et O$\alpha$ trois points A, B, C tel que OA $= a\sqrt{2}$, OB $= b\sqrt{2}$, OC $= c\sqrt{2}$, en designant par M un point quelconque du lieu qui correspond à l'équation différentielle précédente, et joignant M aux points O, A, B, C : cette équation pourra s'ecrire :

$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2(\tang \varphi_1 + \tang \varphi_2 + \tang \varphi_3 - \tang \varphi)\frac{d\alpha}{dv} + \tang\varphi_1 \tang\varphi_2 \tang \varphi_3 = 0$$

$\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ désignant les angles que forment les quatre lignes obtenues avec l'axe des $v$. Si l'on désigne en outre par $\tang \omega_1$, $\tang \omega_2$ les deux valeurs de $\frac{d\alpha}{dv}$ relatives au point M, on aura les relations géometriques :

$$\tang \omega_1 + \tang \omega_2 + \tang \varphi = \tang \varphi_1 + \tang \varphi_2 + \tang \varphi_3$$
$$\tang \omega_1 \tang \omega_2 = \tang \varphi_1 \tang \varphi_2 \tang \varphi_3 .$$

De ceci résulte un certain moyen géometrique de construire par points le lieu des points M.

Dans le cas où $b = a$ l'équation (6) devient illusoire quant à ce qui concerne les lignes de courbure de la surface des ondes. Mais en l'envisageant comme se rapportant à une courbe plane et supposant en outre $c = 0$ elle donne :

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{\alpha - a}{v - a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha}{v}}\right)$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\frac{\alpha}{v} = \frac{1}{\eta}\left(2 - \frac{1}{\eta}\right) \qquad \text{en prenant} \qquad \eta = \mathrm{H}\sqrt{v(a - v)} + \frac{v}{a}$$

H étant la constante arbitraire. Enfin on peut remarquer la solution particulière $\alpha = v$ qui verifie l'équation (6) et n'a aucun rapport avec les lignes de courbure de la surface des ondes.

5. Les équations de la normale donnent :

$$X^2 = x^2 - 2R\lambda x + R^2\lambda^2 \text{ ec.}$$

si donc on fait :

$$\mathrm{S}\,X^2 = A, \qquad \mathrm{S}aX^2 = B, \qquad \mathrm{S}a(b + c)X^2 = C$$

on aura :

$$A = \alpha - 2p\,R + 3R^2,$$
$$B = \beta - 2R\,\mathrm{S}ax\lambda + AR^2$$
$$C = \gamma - 2R\mathrm{S}a(b + c)\,x\lambda + 2BR^2.$$

D'après les identités ($\alpha$) et les expressions $\lambda$, $\mu$, $\nu$ on trouve tout de suite :

$$\mathrm{S}a(b + c)\lambda x = \frac{\beta(\alpha\beta - C) - C(\alpha^2 - A\alpha + B - \beta)}{D} = \beta p + \frac{C}{p};$$

en ayant égard à la valeur de $\mathrm{S}ax\lambda$ du n.° 2, on aura donc:

$$A = \alpha - 2v\theta + 3v\theta^2$$
$$B = \beta - 2\beta\theta + Av\theta^2$$
$$C = \gamma - 2(\beta v + C)\theta + 2Bv\theta^2\,;$$

en y joignant l'équation (6) ou :

$$\theta^2 - \left\{ S\frac{\alpha - a}{v - a} - \frac{\alpha}{v} \right\} \theta + \Pi \frac{\alpha - a}{v - a} = 0$$

et :

$$\beta = \frac{v(\alpha^2 - A\alpha + B) - C}{v - \alpha},$$

l'élimination de $\beta$, $\alpha$, $v$, $\theta$ entre ces cinq équations donnera en $A$, $B$, $C$ l'équation du lieu des centres des courbures principales.

6. J'ajouterai ici quelques relations différentielles qui peuvent être utiles. Si l'on fait :

$$\Delta = (a - b)(b - c)(c - a)$$

on sait et l'on déduit facilement des équations (1), que :

$$x^2 = \frac{b-c}{\Delta}(\alpha - a)(\beta - bc)\,, \quad y^2 = \frac{c-a}{\Delta}(\alpha - b)(\beta - ca)\,, \quad z^2 = \frac{a-b}{\Delta}(\alpha - c)(\beta - ab)\,.$$

En différentiant ces expressions et ayant égard aux identités :

$$Sa^2(b - c) = -\Delta\,, \qquad Sbc(b - c) = -\Delta\,, \qquad Sa(b^2 - c^2) = \Delta$$
$$Sbc(b^2 - c^2) = -A\Delta\,, \qquad Sa^3(b - c) = -A\Delta$$
$$Sb^2c^2(b - c) = -B\Delta\,, \qquad Sa^3(b^2 - c^2) = -B\Delta$$

on trouve aisément pour l'espression du carré $\overline{ds}^2$ d'un element de courbe quelconque tracée sur la surface des ondes :

$$4\overline{ds}^2 = \frac{\alpha^2 - A\alpha + B - \beta}{\Pi(\alpha - a)}\,\overline{d\alpha}^2 + \frac{C - \alpha\beta}{\Pi(\beta - bc)}\,\overline{d\beta}^2\,.$$

On obtient de la même manière :

$$4Sa\overline{dx}^2 = \frac{C - \alpha\beta}{\Pi(\alpha - a)}\,\overline{d\alpha}^2 + \frac{\beta^2 - B\beta + AC - C\alpha}{\Pi(\beta - bc)}\,\overline{d\beta}^2\,.$$

Maintenant, si l'on observe que les équations des lignes géodésiques d'une surface quelconque peuvent s'ecrire :

$$d^2x = N\lambda\, ds^2\,, \qquad d^2y = N\mu\, ds^2\,, \qquad d^2z = N\nu\, ds^2$$

N étant une indéterminée, et que ici les relations; $Sx^2 = \alpha$, $Sax^2 = \beta$ donnent suc-

cessivement :

$$\mathrm{S}x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha\,, \qquad \mathrm{S}x\,\mathrm{d}^2x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\alpha - \mathrm{d}s^2$$

$$\mathrm{S}ax\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\beta\,, \qquad \mathrm{S}ax\,\mathrm{d}^2x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\beta - \mathrm{S}a\mathrm{d}x^2$$

on aura d'abord :

$$\mathrm{S}x\,\mathrm{d}^2x = \mathrm{N}\mathrm{d}s^2\,\mathrm{S}\lambda x = \mathrm{N}p\,\mathrm{d}s^2$$

$$\mathrm{S}ax\,\mathrm{d}^2x = \mathrm{N}\,\mathrm{d}s^2\,\mathrm{S}a\lambda x = \mathrm{N}\frac{\beta}{p}\,\mathrm{d}s^2$$

et ensuite :

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\alpha - \mathrm{d}s^2 = \mathrm{N}p\,\mathrm{d}s^2$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\beta - \mathrm{S}a\,\mathrm{d}x^2 = \mathrm{N}\,\frac{\beta}{p}\,\mathrm{d}s^2$$

d'où :

$$\mathrm{d}^2\alpha - 2\mathrm{d}s^2 = \frac{p^2}{\beta}\,(\mathrm{d}^2\beta - 2\mathrm{S}a\,\mathrm{d}x^2)$$

pour l'équation des lignes géodésiques, dans laquelle on substituira pour $\mathrm{d}s^2$, et $\mathrm{S}a\,\mathrm{d}x^2$ leurs expressions précédentes, et où l'on prendra ensuite ce qu'on voudra pour la variable indépendante.

Paris, 25 Août 1859.

---

## OSSERVAZIONI SULLA MEDESIMA QUISTIONE
## DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

1.° Dall'interessante lavoro del Sig. Combescure risulta che considerando il punto di coordinate $x$, $y$, $z$ della superficie delle onde, ed indicando per quel punto con $r$ il quadrato del raggio vettore, e con $p$ il quadrato della lunghezza della perpendicolare al piano tangente; la equazione fra quelle variabili delle linee di curvatura della superficie medesima è la seguente (vedi equazione (5) ):

$$(1)\qquad \varphi(p)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \varphi(r) + \frac{1}{p}\,\{\varphi'(p)\,p(p-r) - \varphi(p)\,(3p-r)\}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = 0$$

essendo :

$$\varphi(t) = (t-a)(t-b)(t-c)\,.$$

Dalla equazione superiore si passa facilmente alla :

$$\varphi(p)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 - \varphi(r) + 2\varphi(p)\,(p-r)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\log\frac{(p-r)\sqrt{p}}{\sqrt{\varphi(p)}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = 0\,,$$

e da questa, sostituendo alla variabile $r$ la variabile $\omega$ legata alla prima dall'equazione:

$$\log\frac{(p-r)\sqrt{p}}{\sqrt{\varphi(p)}}=\omega$$

alla:

$$(2)\qquad \psi(p)\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^2-(e^{\omega}+e^{-\omega})+\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}=0$$

nella quale si è posto per brevità $\psi(p)=\sqrt{p\varphi(p)}$.

2.° Indicando con $V_1$, $V_2$ le due velocità di propagazione di un onda piana, e con $\lambda$, $\mu$, $\nu$ i coseni degli angoli che la normale alla medesima fa cogli assi, si può considerare la superficie delle onde come la superficie inviluppo del piano (*Lamé*, *théorie de l'Elasticité,* pag. 242.)

$$(3)\qquad \lambda x+\mu y+\nu z=V_1\,.$$

Poniamo $u=V_1^2$, $v=V_2^2$; l'equazione (3) dà evidentemente $p=u$, ed essendo come è noto (*Lamé,* pag. 243):

$$x=\lambda\left(\sqrt{u}+\frac{\rho}{u-a}\right),\qquad y=\mu\left(\sqrt{u}+\frac{\rho}{u-b}\right),\qquad z=\nu\left(\sqrt{u}+\frac{\rho}{u-c}\right)$$

nelle quali:

$$\rho=\frac{\varphi(u)}{(v-u)\sqrt{u}},$$

ed osservando che (*Lamé,* pag. 238 equaz. (37)(39))

$$S\frac{\lambda^2}{u-a}=0\,,\qquad S\frac{\lambda^2}{(u-a)^2}=\frac{v-u}{\varphi(u)}$$

si avrà:

$$r=u+\frac{\varphi(u)}{u(v-u)},$$

Le variabili $r$, $p$ sono quindi legate alle $u$, $v$ dalle:

$$r=u+\frac{\varphi(u)}{u(v-u)}\,,\qquad p=u\,.$$

Da queste si deducono le relazioni:

$$\frac{(p-r)\sqrt{p}}{\sqrt{\varphi(p)}}=\frac{\sqrt{\varphi(u)}}{(u-v)\sqrt{u}}\,,\qquad \sqrt{p\varphi(p)}=\sqrt{u\varphi(u)}$$

ossia ponendo:

$$\log \frac{(u - v)\sqrt{u}}{\sqrt{\varphi(u)}} = \theta$$

le seguenti :

$$\omega = -\theta\ , \qquad \psi(p) = \psi(u).$$

Ora sostituendo questi valori nella equazione (2) si otterrà l' equazione fra le variabili $u$, $v$ delle linee di curvatura della superficie delle onde; ma questa equazione evidentemente è dell'identica forma della (2) ; dunque si ha la singolare proprietà, che sostituendo, nella equazione (1) del Sig. Combescure, ordinatamente alle variabili $r$, $p$ le variabili $v$, $u$ l'equazione risultante è quella della linea di curvatura della superficie delle onde fra queste ultime variabili (*).

Ponendo per brevità $\frac{\mu(p)}{p(r-p)} = k$ si hanno per i valori delle coordinate $x$, $y$, $z$ di un punto qualunque della superficie delle onde in funzione delle quantità $r$, $p$ le formole seguenti :

$$x = \lambda\sqrt{p}.\frac{r-a}{p-a}, \qquad y = \mu\sqrt{p}.\frac{r-b}{p-b}, \qquad z = \nu\sqrt{p}.\frac{r-c}{p-c}$$

essendo :

$$\lambda^2 = \frac{p-a}{\varphi'(a)}(p-a+k)\ , \quad \mu^2 = \frac{p-b}{\varphi'(b)}(p-b+k)\ , \quad \nu^2 = \frac{p-c}{\varphi'(c)}(p-c+k)\ .$$

Pavia. Novembre 1859.

---

(*) Il Sig. Rouché aveva presentato nella seduta del 13 Giugno 1859 dell' Academia delle Scienze (Institut. N°. 1328) una nota nella quale annunciava aver trovato l' equazione delle linee di curvatura della superficie delle onde sotto forma finita e algebrica, assumendo quali variabili le velocità di propagazione. In seguito ritirò quel lavoro essendosi accorto di un errore di calcolo —. Osserviamo che le linee sulla superficie delle onde per le quali $u$ =coste., $v$ =coste. non sono ortogonali come abbiamo asserito nella nota della pag. 135 Anno 2°. di questi Annali ; la equazione (3) di questa nota è la condizione per l'ortogonalità nel solo caso in cui si verifichi l'equazione (2) ; quindi per le linee $u$ = coste. $v$ = coste. non verificandosi la condizione (2) non può aver luogo la (3).

## FONDAMENTI DI UNA TEORICA GENERALE DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA.

**DI B. RIEMANN.**

(Traduzione dal tedesco di una Dissertazione inaugurale pubblicata a Göttingen nel 1851).

### 1.

Se ad ogni valore di una quantità variabile $z$, che può prendere successivamente tutti i valori reali, corrisponde un solo valore della quantità indeterminata $w$, si dice che $w$ è una funzione di $z$, e se quando $z$ percorre con continuità tutti i valori compresi tra due valori dati, anche $w$ varia con continuità, la funzione $w$ in questo intervallo si dice continua.

Questa definizione evidentemente non stabilisce alcuna legge tra tutti i particolari valori della funzione, poichè se si dispone della medesima per un intervallo determinato, il modo della sua continuazione al di fuori dello stesso rimane del tutto arbitrario.

La dipendenza della quantità $w$ da $z$ può esser data per mezzo di una legge matematica, in guisa che per mezzo di date operazioni di calcolo si possa trovare per ogni valore di $z$ il corrispondente di $w$. La proprietà di potere essere determinate per ogni valore di $z$ compreso in un certo intervallo, mediante la stessa legge di dipendenza, si attribuì un tempo soltanto a un certo genere di funzioni (*Functiones continuae di Eulero*); ma le nuove ricerche hanno dimostrato, che esistono espressioni analitiche, per le quali può rappresentarsi qualunque funzione continua in un dato intervallo. Perciò è lo stesso definire la dipendenza della quantità $w$ dalla quantità $z$ come data in modo arbitrario, o come data mediante determinate operazioni di calcolo. Ambedue i concetti coincidono in conseguenza dal menzionato teorema.

Ma non è più così, quando le variazioni delle grandezze $z$ non si limitano ai valori reali, ma comprendono anche i valori complessi della forma $x+iy$ (dove $i=\sqrt{-1}$.

Siano $x+iy$ e $x+iy+dx+i\,dy$ due valori di $z$ infinitamente vicini, ai quali corrispondano per $w$ i valori $u+iv$, e $u+iv+du+i\,dv$. Allora, se assumiamo arbitraria la dipendenza della quantità $w$ da $z$, il rapporto $\frac{du+i\,dv}{dx+i\,dy}$ muterà in generale con i valori di $dx$ e $dy$, poichè, ponendo $dx+i\,dy=\varepsilon e^{\varphi i}$, avremo

$$\frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)i$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)i\right\}\frac{dx - i\,dy}{dx + i\,dy}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)i + \frac{1}{2}\left\{\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)i\right\}e^{-2i\varphi}.$$

Ma in qualunque modo $w$ si possa determinare in funzione di $z$, mediante le semplici operazioni di calcolo, il valore del quoziente differenziale $\frac{dw}{dz}$ è sempre indipendente dal valore particolare del differenziale $dz$ (*); quindi, mediante le semplici operazioni di calcolo, non può esprimersi una dipendenza qualunque della quantità complessa $w$ dalla quantità complessa $z$.

La notata proprietà di tutte le funzioni determinabili in qualunque modo per mezzo di operazioni di calcolo la porremo per fondamento delle seguenti ricerche, dove una tal funzione sarà considerata indipendentemente dalla sua espressione, poichè noi partiremo dalla seguente definizione senza dimostrare adesso che essa è generale e sufficiente per qualunque dipendenza determinabile mediante operazioni di calcolo.

Una variabile complessa $w$ si dice funzione di un altra variabile complessa $z$, quando varia con questa in modo che il valore della derivata $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente dal valore del differenziale $dz$.

2.

Tanto $w$ quanto $z$ saranno considerate come variabili, che possono prendere ogni valore complesso. Per concepire chiaramente queste variazioni, che si estendono in un campo continuo di due dimensioni, converrà ricorrere a una rappresentazione geometrica.

Rappresentiamo un valore qualunque $x + iy$ di $z$ con un punto O del Piano A, il qual punto abbia per coordinate ortogonali $x$ e $y$, e un valore qualunque $u + iv$ di $w$ con un punto Q del piano B, e di coordinate ortogonali $u$, $v$. Ogni dipendenza di $w$ da $z$ sarà rappresentata allora come una dipendenza della posizione del punto Q da quella del punto O. Se ad ogni valore di $z$ corrisponde un valore di $w$ che

(*) Questa proposizione è evidentemente giustificata in tutti i casi, nei quali dall' espressione di $w$ si può per mezzo delle regole di derivazione trovare un espressione di $\frac{dw}{dz}$ in funzione di $z$; in questo senso per adesso la riterremo vera rigorosamente e generale.

varia con $z$ in modo continuo e determinato, con altre parole, se $u$ e $v$ sono funzioni continue di $x$ e $y$, ad ogni punto del Piano A corrisponderà un punto del Piano B, ad ogni linea in generale una linea, a ogni area continua un area continua. Quindi si potrà rappresentare questa dipendenza di $w$ da $z$ come una imagine del Piano A sul Piano B.

3.

Determiniamo ora le proprietà che ha questa imagine quando $w$ è funzione della grandezza complessa $z$, cioè quando $\frac{dw}{dz}$ è indipendente da $dz$.

Indichiamo con $o$ un punto del piano A nella vicinanza di O, e con $q$ la sua imagine nel piano B, quindi con $x + iy + dx + i\,dy$ e $u + vi + du + i\,dv$ i valori rispettivi di $z$ e $w$ in questi punti.

Riguardando O e Q come origini delle coordinate, $dx$, $dy$ e $du$, $dv$ saranno le coordinate ortogonali dei punti $o$ e $q$, e ponendo:

$$dx + i\,dy = \varepsilon e^{\varphi i}\,, \qquad du + i\,dv = \eta e^{\psi i}\,,$$

$\varepsilon$, $\varphi$, $\eta$, $\psi$ saranno le coordinate polari di questi punti.

Siano ora $o'$ e $o''$ due posizioni determinate di $o$ infinitamente vicine ad O, distinguendo le quantità che ad essi si riferiscono, mediante indici analoghi, avremo per le supposizioni fatte:

$$\frac{du' + i\,dv'}{dx' + i\,dy'} = \frac{du'' + i\,dv''}{dx'' + i\,dy''},$$

e quindi

$$\frac{du' + i\,dv'}{du'' + i\,dv''} = \frac{\eta'}{\eta''}\,e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx' + i\,dy'}{dx'' + i\,dy''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\,e^{(\varphi' - \varphi'')i}\,;$$

onde

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\,,\quad \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi''\,;$$

cioè nei triangoli $o'Oo''$ e $q'Qq''$, sono eguali gli angoli $o'Oo''$, e $q'Q''q''$, e i lati che li comprendono sono proporzionali tra loro.

Dunque i triangoli infinitamente piccoli corrispondenti, e quindi in generale le parti infinitamente piccole del Piano A e le loro imagini sul Piano B sono simili. Una eccezione a questo teorema si presenta soltanto nei casi particolari, nei quali le variazioni tra loro corrispondenti di $z$ e di $w$ non istanno tra loro in un rapporto finito, ciò che tacitamente si supporrà sempre escluso (*).

(*) Sopra questo soggetto si veda « Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von

4.

Se poniamo il quoziente differenziale:

$$\frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy}$$

sotto la forma

$$\frac{\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}i\right)i\,dy}{dx + i\,dy},$$

è chiaro che esso avrà lo stesso valore per due valori qualunque di $dx$ e $dy$, soltanto allorchè sarà:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}.$$

Queste condizioni sono dunque necessarie e sufficienti, affinchè $w = u + vi$ sia una funzione di $z = x + iy$. Dalle medesime seguono l'equazioni:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

le quali sono il fondamento per la ricerca delle proprietà, che appartengono a un termine di una tal funzione separatamente considerato. Noi anteporremo la dimostrazione delle più importanti di queste proprietà allo studio della funzione completa, ma prima ancora spiegheremo e stabiliremo alcuni punti più generali, per facilitare queste ricerche.

5.

Nelle seguenti considerazioni limiteremo le variazioni di $x$ e di $y$ a un campo finito, riguardando come luogo del punto O non più il Piano stesso A, ma una superficie T distesa sopra il medesimo. Preferiamo questa rappresentazione, per la quale non farà difficoltà parlare di superficie sovraposte, per rendere evidente la possibilità che il luogo del punto O si estenda più volte sopra la stessa parte del Piano; però presupporremo in questo caso, che le superficie sovrapposte non si attacchino lungo una linea, in guisa che non si abbiano nè piegature della superficie, nè intersezioni di parti sovrapposte della medesima. Così il numero delle parti di superficie sovrapposte in ogni parte del Piano sarà completamente determinato, quando sarà data la

C. F. Gauss. (Als Beantwortung der von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 ausgegebenen Preisfrage » abgedruckt in: « Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft, Altona, 1825. »).

*

posizione e il senso del contorno (cioè la sua parte interna ed esterna); queste parti potranno però continuarsi una nell'altra anche in modi diversi.

Infatti, se conduciamo per una parte qualunque del Piano coperta dalla superficie una linea qualunque $l$, il numero delle parti di superficie sovrapposte muta soltanto quando si oltrepassa il contorno, e muta di $+1$ procedendo dall'esterno all' interno, nel caso opposto muta di $-1$, e quindi è per tutto completamente determinato. Lungo questa linea ogni parte di superficie che vi termina si continua in modo intieramente determinato, finchè la linea non incontra il contorno, poichè non può aversi indeterminatezza altrochè in punti separati, o giacenti sopra la linea stessa, o a una distanza finita dalla medesima; quindi limitandoci a una parte della linea $l$ condotta nell'interno della superficie, e da ambedue le parti della linea stessa a una striscia di superficie sufficientemente piccola, possiamo parlare di determinate parti di superficie che vi terminano, il numero delle quali è eguale da ambedue le parti, e che noi, stabilita una determinata direzione alla linea, indicheremo, quelle di sinistra con $a_1$, $a_2, \ldots a_n$, quelle di destra con $a'_1$, $a'_2, \ldots a'_n$. Allora ogni parte di superficie $a$ si continuerà in una parte di superficie $a'$: e questo in generale avverrà per tutta la linea $l$, ma per posizioni particolari di $l$ può in uno dei suoi punti essere altrimenti.

Se ammettiamo che al di sopra di un punto $\sigma$ (cioè lungo la parte della linea $l$ che si avanza) colle parti di superficie $a'_1$, $a'_2 \ldots a'_n$ siano attaccate le parti di superficie $a_1$, $a_2 \ldots a_n$, al di sotto dello stesso poi le parti di superficie $a_{\alpha_1}$ $a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}$, dove $\alpha_1$ $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ differiscono da $1, 2, \ldots n$ solo nell'ordine, un punto che al di sopra di $\sigma$ da $a_1$ passa in $a'_1$, quando al di sotto di $\sigma$ ritorna alla sinistra, entrerà in $a_{\alpha_1}$, e quando gira intorno al punto $\sigma$ da sinistra a destra, l'indice della parte di superficie, in cui si trova, percorre successivamente i numeri

$$1\,,\ \alpha_1\,,\ \alpha_{\alpha_1}\,,\ \ldots \mu\,,\ \alpha_\mu\,,\ \ldots$$

In questa serie tutti i termini sono differenti tra loro, finchè non torna il termine 1, perchè un termine medio qualunque $\alpha_\mu$ è preceduto immediatamente e necessariamente da $\mu$ e successivamente da tutti i precedenti termini sino ad 1; ma se dopo un numero di termini, che evidentemente è minore di $n$ e che sia $= m$, ritorna il termine 1, gli altri devono seguire nello stesso ordine. Allora il punto che si muove intorno a $\sigma$ dopo $m$ giri ritorna nella stessa parte di superficie, e resta sempre in $m$ parti di superficie sovrapposte, le quali si uniscono in un solo punto $\sigma$. Chiameremo questo un punto di giramento di $(m-1)^{esimo}$ ordine delle superficie T. Applicando lo stesso processo alle altre parti di superficie, se queste non saranno tra loro disgiunte si divideranno in sistemi di $m_1$, $m_2, \ldots$ parti di superficie, nel qual caso

saranno nel punto $\sigma$ anche dei punti di giramento di $(m_1 - 1)^{esimo}$, $(m_2 - 1)^{esimo}$ ordine.

Quando è data la posizione e il senso del contorno di T e la posizione dei suoi punti di giramento, T o è completamente determinata o limitata a un numero finito di forme differenti; e questo ultimo in quanto che queste determinazioni possono riferirsi a diverse parti di superficie sovrapposte.

Una variabile che per ogni punto O della superficie T, in generale, cioè senza escludere una eccezione per linee e punti singolari (*), prende un valore determinato che varia con continuità colla posizione dello stesso, può evidentemente riguardarsi come una funzione di $x$, $y$, e dovunque in seguito parleremo di funzioni di $x$, $y$, le intenderemo così.

Prima di passare a considerare queste funzioni, intercaleremo anche alcune considerazioni intorno alla connessione delle superficie. Ci limiteremo a superficie che non si dividono lungo una linea.

## 6.

Riguarderemo due parti di superficie come connesse o appartenenti a uno stesso pezzo, quando si potrà condurre una linea che senza escir dalla superficie vada da un punto dell'una a un punto dell'altra, come separate, quando questo sarà impossibile.

Lo studio della connessione di una superficie si appoggia sopra lo spezzamento per mezzo di trasversali, cioè di linee che partendo da un punto del contorno percorrono la superficie semplicemente, cioè senza passare più volte per uno stesso punto, e vanno a un punto del contorno, il quale può anche essere un punto delle parti aggiunte al contorno, cioè uno dei punti delle trasversali.

Una superficie connessa, quando da ogni trasversale è divisa in due pezzi separati, dicesi semplicemente connessa, altrimenti molteplicemente connessa.

*Teorema* 1.° Una superficie A semplicemente connessa è divisa da ogni trasversale $ab$ in due pezzi semplicemente connessi.

Supponiamo che uno di questi pezzi non venga nuovamente diviso in due pezzi separati da una trasversale $cd$; secondo che nessuno dei due estremi, o l'estremo $c$, o ambedue gli estremi cadessero in $ab$, ristabilendo l'unione lungo l'intera linea $ab$ o lungo la parte $cb$ o lungo la parte $cd$ della stessa, si otterrebbe una superficie connessa, che nascerebbe da A mediante una trasversale contro il supposto.

---

(*) Questa limitazione non è imposta certamente dal concetto di Funzione in se, ma è necessaria per potere applicarle il calcolo infinitesimale: una funzione che in tutti i punti di una superficie è discontinua, come, per esempio, una funzione che ha il valore 1 quando $x$ è commensurabile, e $y$ è commensurabile, e altrimenti ha il valore 2, non può assoggettarsi nè a differenziazione nè a integrazione, quindi non può assoggettarsi (immediatamente) al calcolo infinitesimale in generale. La limitazione fatta arbitrariamente qui per la superficie T sarà più tardi (Art. 15) giustificata.

*Teorema* 2º Quando una superficie T da $n_1$ (*) trasversali $q_1$ è divisa in un sistema $T_1$ di $m_1$ pezzi semplicemente connessi, e da $n_2$ trasversali $q_2$ in un sistema $T_2$ di $m_2$ pezzi, $n_2 - m_2$ non può esser maggiore di $n_1 - m_1$.

Ogni linea $q_2$, quando tutta intera non fa parte del sistema di trasversali $q_1$, forma contemporaneamente una o più trasversali $q'_2$ della superficie $T_1$. Come estremi delle trasversali $q'_2$ si devono riguardare:

1. I $2n_2$ punti estremi delle trasversali $q_2$, fuori che quando queste nei loro tratti estremi fanno parte del sistema di linee $q_1$;

2. Ogni punto intermedio di una trasversale $q_2$, in cui questa passa per un punto intermedio di una linea $q_1$, fuori che quando si trova già sopra un altra linea $q_1$, cioè quando un estremo di una trasversale $q_1$ passa per il medesimo.

Ora sia $\mu$ il numero delle volte che linee di ambedue i sistemi s'incontrano o si separano (dove però ogni punto solo a comune deve contarsi per due), $\nu_1$ il numero di volte che un tratto estremo di $q_1$ coincide con una parte intermedia di una linea $q_2$, $\nu_2$ il numero di volte che un tratto estremo di una $q_2$ coincide con una parte intermedia di una linea $q_1$, finalmente $\nu_3$ il numero di volte che un tratto estremo delle $q_1$ coincide con un tratto estremo di una linea $q_2$; così avremo

$$\text{N}^\circ\ 1: \ 2n_2 - \nu_3 - \nu^3, \qquad \text{N}^\circ\ 2; \ \mu - \nu_1$$

punti estremi per le trasversali $q'_2$; ma ambedue i casi presi insieme abbracciano tutti i punti estremi e ciascuno una volta soltanto; e quindi il numero di queste trasversali sarà:

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s.$$

Con un ragionamento del tutto analogo si dimostra che il numero delle trasversali $q'_1$ della superficie $T_2$, che vengono formate dalle linee $q_1$, è eguale a

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2} = n_1 + s.$$

Ora la superficie $T_1$ evidentemente è trasformata dalle $n_2 + s$ trasversali $q'_2$ nelle stesse superficie in cui $T_2$ è divisa dalle $n_1 + s$ trasversali $q'_1$. Ma $T_1$ consiste di $m_1$ pezzi semplicemente connessi, e per il teorema 1, riman divisa da $n_2 + s$ trasversali in $m_1 + n_2 + s$ pezzi; quindi, se fosse $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$ il numero dei pezzi $T_2$, per mezzo delle $n_1 + s$ trasversali, dovrebbe essere aumentato di più di $n_1 + s$ pezzi, ciò che è assurdo.

---

(*) Per uno spezzamento mediante più trasversali deve sempre intendersi uno spezzamento fatto successivamente, cioè tale, che la superficie nata da una trasversale sia spezzata da una nuova trasversale.

In conseguenza di questo teorema, indicando con $n$ il numero delle trasversali, con $m$ il numero dei pezzi, il numero $n - m$ sarà costante per tutte le divisioni della superficie in pezzi semplicemente connessi: poichè se consideriamo due spezzamenti dati, uno di $n_1$ trasversali in $m_1$ pezzi, l'altro di $n_2$ trasversali in $m_2$ pezzi, se i primi sono semplicemente connessi dovrà essere $n_1 - m_1 \overline{\gtrless} n_2 - m_2$, e se gli ultimi sono semplicemente connessi dovrà essere $n_2 - m_2 \overline{\gtrless} n_1 - m_1$: dunque $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$.

Questo numero potrà pertanto chiamarsi « ordine della connessione » di una superficie: e sarà

per mezzo di ogni trasversale diminuito di 1, secondo la definizione:

invariabile, quando si conduca una linea da un punto della superficie, che trascorra semplicemente le superficie sino al contorno o a un punto di una trasversale;

aumentato di 1 da una linea che percorrendo semplicemente la superficie termina in due punti separati;

perchè la prima aggiungendo una trasversale; la seconda linea aggiungendo due trasversali vengono a formare una trasversale.

Finalmente l'ordine della connessione di una superficie composta di più parti si ottiene sommando gli ordini della connessione di queste parti.

In seguito nel maggior numero di casi ci limiteremo a superficie composte di un sol pezzo, e per indicare l'ordine della loro connessione useremo le parole: semplice duplice, triplice, chiamando $n$ uplicemente connessa una superficie che per mezzo di $n-1$ trasversali può essere ridotta in una semplicemente connessa.

Quanto alla dipendenza della connessione del contorno dalla connessione della superficie è chiaro che:

1. Il contorno di una superficie semplicemente connessa consiste necessariamente di una sola linea chiusa.

Se il contorno consistesse di pezzi separati, una trasversale $q$, che unisse un punto di un pezzo $a$ con uno d'un altro $b$, dividerebbe soltanto l' una dall' altra, parti di una superficie semplicemente connessa, poichè nella superficie si potrebbe condurre lungo $a$ una linea da un lato della trasversale $q$ all'opposto; e quindi $q$ non spezzerebbe la superficie, contro il supposto.

2. Ogni trasversale aumenta o diminuisce di 1 i pezzi del contorno.

Una trasversale $q$ o unisce un punto di un pezzo di contorno $a$ con un punto di un altro $b$, e allora tutte queste linee prese insieme colla successione $a, q, b, q$ formano un unico pezzo di contorno chiuso:

o unisce due punti di uno stesso pezzo del contorno; allora questo si spezza per ambedue i suoi estremi in due pezzi, ciascuno dei quali preso insieme colla trasversale forma un pezzo di contorno chiuso:

o finalmente finisce in uno dei suoi punti precedenti, e può esser considerata come composta di una linea chiusa $o$, e di un altra $l$ che unisce un punto di $o$ con un punto di un pezzo di contorno $a$, nel qual caso $o$ da una parte, e $a$, $l$, $o$, $l$ dall'altra, formano ciascuno un pezzo di contorno chiuso.

Dunque o – nel 1.º caso – in luogo di due pezzi di contorno se ne ha uno, o - in ambedue gli altri - in luogo di uno se ne hanno due, onde il nostro teorema risulta dimostrato.

Il numero dei pezzi dei quali è composto il contorno di una superficie $n$ uplicemente connessa, è perciò o eguale a $n$, o eguale ad $n$ meno un numero pari.

Da questo ne tragghiamo il corollario:

Se il numero dei pezzi del contorno di una superficie $n$ uplicemente connessa è eguale ad $n$, questa è divisa in due pezzi separati da ogni curva chiusa che non abbia punti multipli.

Poichè l'ordine della connessione non vien mutato da essa, e il numero dei pezzi del contorno è aumentato di 2; quindi se la superficie fosse connessa, avrebbe un $n$ uplice connessione, e il contorno di $n+2$ pezzi, il che è impossibile.

7.

Se X e Y sono due funzioni di $x$, $y$ continue in tutti i punti della superficie T distesa sopra A, avremo

$$\int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}\right)dT = -\int(X\cos\xi + Y\cos\eta)ds,$$

dove il primo integrale è esteso a tutti gli elementi $d$T della superficie T, il secondo a tutti gli elementi d$s$ del contorno, e in ogni punto del contorno l'angolo d'inclinazione, che la normale al medesimo condotta verso l'interno fa coll'asse delle $x$, è indicata con $\xi$, e quella che fa coll'asse delle $y$ con $\eta$.

Per trasformare l'integrale $\int\frac{dX}{dx}\,dT$, dividiamo la parte del piano A coperta dalla superficie T, mediante un sistema di linee parallelle all'asse delle $x$, in strisce elementari, in modo che ogni punto di giramento della superficie cada sopra una di queste linee. Così la parte di T che si troverà sopra ciascuna di queste strisce sarà composta di uno o più aree trapezoidali separate. Quindi il valore dell' integrale $\int\frac{dX}{dx}\,dT$ relativo a una qualunque di queste strisce elementari, che intercetta sull'asse delle $y$ l'elemento d$y$, sarà evidentemente eguale a $dy\int\frac{dX}{dx}dx$, dove l'integrazione deve essere estesa a quella o quelle linee rette appartenenti alla superfi-

cie T che si trovano sopra una normale che passa per un punto di d$y$. Ora se l'estremità inferiori di queste rette (cioè quelle che corrispondono ai più piccoli valori di $x$) si indicano con $O_{\prime}$, $O_{\prime\prime}$, $O_{\prime\prime\prime}$, .... e le superiori con $O'$, $O''$, $O'''$, ... e con $X_{\prime}$, $X_{\prime\prime}$, ... , $X'$, $X''$, ... i respettivi valori di X in questi punti, con $ds_{\prime}$, $ds_{\prime\prime}$, ... $ds'$, $ds''$, ... i respettivi elementi intercettati dal contorno sopra le strisce elementari, con $\xi_{\prime}$, $\xi_{\prime\prime}$, .... $\xi'$, $\xi''$, ... i valori di $\xi$ in questi elementi, sarà

$$\int \frac{dX}{dx} dx = -X_{\prime} - X_{\prime\prime} - X_{\prime\prime\prime} - .... + X' + X'' + X''' + ....$$

Gli angoli $\xi$ saranno acuti nell'estremità inferiori, ottusi nelle superiori, quindi

$$dy = \cos\xi_{\prime}\, ds_{\prime}\,, = \cos\xi_{\prime\prime}\, ds_{\prime\prime}\,, = .... = , -\cos\xi'\, ds'\,, = -\cos\xi''\, ds''\,, = ... ;$$

e sostituendo questi valori, si ottiene

$$dy \int \frac{dX}{dx} dx = -\sum X \cos\xi\, ds\,,$$

dove la sommazione si estende a tutti gli elementi del contorno, che hanno per projezione d$y$ sopra l'asse delle $y$.

Estendendo l'integrazione a tutti i d$y$ si esauriranno evidentemente tutti gli elementi della superficie T e tutti gli elementi del contorno, e quindi con questa estensione degl'integrali avremo :

$$\int \frac{dX}{dx} dT = -\int X \cos\xi\, ds\,.$$

Con analogo ragionamento si trova

$$\int \frac{dY}{dy} dT = -\int Y \cos\eta\, ds\,,$$

e quindi

$$\int \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) dT = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta)\, ds\,,$$

come volevamo dimostrare.

8.

Se rappresentiamo con $s$ la lunghezza del contorno, contata da un punto fisso come origine, in un senso determinato da stabilirsi in seguito, fino a un punto qualunque $O_0$, e con $p$ la distanza di un punto qualunque O della normale condotta per $O_0$ da questo punto, considerando come positive le distanze contate verso l'interno; i valori di $x$ e di $y$ nel punto O potranno riguardarsi come funzioni di $s$ e

di $p$, e nei punti del contorno avremo allora per le derivate parziali:

$$\frac{dx}{dp} = \cos\xi\,,\quad \frac{dy}{dp} = \cos\eta\,,\quad \frac{dx}{ds} = \pm\cos\eta\,,\quad \frac{dy}{ds} = \mp\cos\xi\,,$$

dove si devono prendere i segni superiori, quando la direzione nella quale $s$ è riguardata come crescente, fa con $p$ un angolo, il cui senso è eguale a quello dell'asse $x$ coll'asse $y$, i segni inferiori nel caso opposto. Prenderemo questa direzione in tutte le parti del contorno in modo che

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dp}\,,$$

e quindi

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dp}\,,$$

ciò che non toglie essensialmente la generalità dei nostri risultati.

Possiamo evidentemente estendere queste determinazioni anche alle linee nell'interno di T; soltanto per determinare qui il segno di $dp$ e di $ds$, quando è stabilita come là la loro reciproca dipendenza, bisogna aggiungere anche se è il segno di $dp$ e di $ds$ che si fissa; per una linea chiusa fisseremo qual'è la parte di superficie da lei limitata di cui deve riguardarsi come contorno, con che è determinato il segno di $dp$, ma per una linea non chiusa daremo la sua origine, cioè l'estremità in cui $s$ ha il minimo valore.

L'introduzione dei valori ottenuti per $\cos\xi$ e $\cos\eta$ nell'equazione dimostrata nel precedente paragrafo dà, estendendo egualmente gl'integrali:

$$\int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}\right)dT = -\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds = \int\left(X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}\right)ds\,.$$

9.

Applicando il teorema del paragrafo precedente al caso in cui in tutta la superficie è

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy} = 0\,,$$

abbiamo il seguente teorema:

I. Se X e Y sono due funzioni finite e continue e sodisfano all'equazione

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy} = 0$$

in tutti i punti di T, avremo

$$\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds = 0\,,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di T.

Supponiamo una superficie qualunque $T_1$ distesa sopra A divisa in modo qualunque in due pezzi $T_2$ e $T_3$, l'integrale

$$\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds,$$

rapporto al contorno $T_2$, potrà esser considerato come la differenza degl'integrali relativi al contorno di $T_1$ e di $T_3$, poichè dove $T_3$ ha il contorno comune con $T_1$, ambedue gl'integrali si distruggono, e tutti gli altri elementi appartengono a un elemento del contorno $T_2$.

Per mezzo di questa trasformazione, dal teorema I si ottiene il seguente:

II. Il valore dell'integrale

$$\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds$$

esteso a tutto il contorno di una superficie distesa sopra A riman costante per qualunque distensione o ristringimento dello stesso; quando non si lasci fuori o non si oltrepassi nessuna parte di superficie, in cui non siano verificate le supposizioni del teorema I.

Ora se le funzioni X e Y sodisfano in ogni parte della superficie T alla precedente equazione alle derivate parziali, ma in singolari linee o punti possiedono discontinuità, si può circondare ognuna di queste linee o di questi punti con una curva sufficientemente piccola, e applicando il teorema II si ottiene allora il seguente:

III. L'integrale $\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds$ esteso a tutto il contorno di T è eguale alla somma degli integrali $\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds$ estesi ai contorni delle curve che circondano ciascuna discontinuità, i quali conservano lo stesso valore comunque piccole siano queste curve.

Questo valore è nullo necessariamente per un punto di discontinuità, quando, colla distanza $\rho$ del punto O dallo stesso, divengono infinitamente piccole, $\rho X$ e $\rho Y$; poichè se si prendono rispetto a questo punto come polo, con un asse polare qualunque, le coordinate polari $\rho$ e $\varphi$, e per la curva che lo circonda una circonferenza descritta intorno allo stesso col raggio $\rho$, il nostro integrale diviene

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)\rho\, d\varphi,$$

e non può avere un valore $k$ differente da zero, perchè, qualunque sia $k$, $\rho$ può esser preso sempre così piccolo che, astrazion fatta del segno, sia

$$\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right)\rho<\frac{k}{2\pi}$$

per ogni valore di $\varphi$, e quindi

$$\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi<k\,.$$

IV. Se in una superficie semplicemente connessa distesa sopra A, l'integrale esteso a tutto il contorno di una parte qualunque della superficie

$$\int\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right)\mathrm{d}s=\int\left(\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=0,$$

lo stesso integrale esteso a una linea che va da un punto $\mathrm{O}_0$ a un altro O, ha lo stesso valore qualunque sia questa linea.

Infatti due linee $s_1$ e $s_2$, che uniscono i punti $\mathrm{O}_0$ e O, prese insieme formano una linea chiusa $s_3$. Questa linea o possiede essa stessa la proprietà di non intersecare se medesima, oppure si può spezzare in più linee chiuse che possiedano questa proprietà; poichè percorrendola a partire da un punto qualunque, ogni volta che si torni a uno stesso punto, si può separare la parte chiusa così percorsa e considerare la seguente come continuazione della prima parte che arrivava fino a quel punto. Ma ognuna di queste linee chiuse spezza la superficie in una semplicemente e in una doppiamente connessa; perciò forma necessariamente l'intero contorno di uno di questi pezzi, e l'integrale esteso a tutta la medesima $\int\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right)\mathrm{d}s$ sarà dietro il supposto $=0$. Lo stesso in conseguenza vale dell'integrale esteso a tutta la linea $s_3$, quando la grandezza $s$ si riguardi sempre come crescente nella stessa direzione; devono perciò gl'integrali estesi alle linee $s_1$ e $s_2$, quando questa direzione resti invariata, cioè vada in una delle stesse da $\mathrm{O}_0$ ad O nell'altra da O ad $\mathrm{O}_0$, distruggersi reciprocamente, quindi presi da $\mathrm{O}_0$ ad O in ambedue saranno eguali.

Ora quando abbiamo una superficie qualunque T, nella quale sia in generale $\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{d}y}=0$, si separino primieramente, quando sia necessario, le discontinuità, in modo che nel resto della superficie per ogni parte della stessa, sia

$$\int\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=0\,,$$

e si spezzi la superficie restante per mezzo di trasversali in una semplicemente con-

nessa T*. Allora per ogni linea che va nell'interno di T* da un punto $O_0$ a un altro O l'integrale ha lo stesso valore; quindi questo valore, che per brevità indicheremo con $\int_{O_0}^{O}\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)ds$, è determinato indipendentemente dalla linea percorsa, e riguardando $O_0$ come fisso e O come mobile, dipende solo dalla posizione di O, e quindi può riguardarsi come una funzione di $x$ e di $y$. La variazione di questa funzione, quando O si muova lungo un elemento lineare qualunque d$s$, sarà espressa da $\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)ds$, in T* sarà per tutto continua, e eguale dalle due parti di una trasversale di T.

V. L'integrale $Z = \int_{O_0}^{O}\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)ds$ forma perciò, riguardando $O_0$ come fisso, una funzione di $x$, e di $y$, la quale è continua per tutto in T*, ma oltrepassando una trasversale di T muta di una grandezza costante lungo tutta la trasversale, e ha per derivate parziali

$$\frac{dZ}{dx} = Y\ , \quad \frac{dZ}{dy} = -X\,.$$

Le mutazioni che nascono dall'oltrepassare le trasversali sono dipendenti da un numero di grandezze indipendenti tra loro eguale al numero delle trasversali; poichè se attraversiamo all'indietro il sistema delle trasversali — le ultime parti prima — questa mutazione è per tutto determinata, quando il suo valore è dato al principio di ogni trasversale; ma gli ultimi valori sono indipendenti tra loro.

10.

Se prendiamo $u\frac{du'}{dx} - u'\frac{du}{dx}$ per la funzione fin qui indicata con X, e $u\frac{du'}{dy} - u'\frac{du}{dy}$ per Y, avremo:

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = u\left(\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2}\right) - u'\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right);$$

quindi se le funzioni $u$ e $u'$ sodisfano all'equazioni:

$$\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} = 0\ , \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0\,,$$

sarà

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0\,,$$

e i teoremi del paragrafo precedente si applicano all'espressione

$$\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds\,,$$

che diviene eguale a

$$\int\left(u\frac{du'}{dp}-u'\frac{du}{dp}\right)ds.$$

Ora supponiamo che la funzione $u$ e le sue derivate prime non abbiano discontinuità lungo una linea, e per ogni punto dove sono discontinue, colla distanza $\rho$ del punto O dallo stesso divengano infinitamente piccoli $\rho\frac{du}{dx}$ e $\rho\frac{du}{dy}$; potranno allora, in conseguenza della osservazione III del precedente paragrafo, queste discontinuità essere affatto trascurate.

Poichè allora si può prendere in ognuna delle linee rette che parte da un punto di discontinuità un valore R di $\rho$ in modo che

$$\rho\frac{du}{d\rho}=\rho\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\rho}+\rho\frac{du}{dy}\frac{dy}{d\rho}$$

al di sotto dello stesso resti sempre finito, e indicando con U il valore di $u$ per $\rho=R$, con M, astrazion fatta dal segno il massimo valore di $\rho\frac{du}{d\rho}$ in quell'intervallo, sarà, prendendo sempre le lettere collo stesso significato,

$$U<M(\log\rho-\log R)\,,$$

e quindi $\rho(u-U)$ e anche $\rho u$ diverranno infinitamente piccoli con $\rho$; ma lo stesso secondo il presupposto, vale per $\rho\frac{du}{dx}$ e $\rho\frac{du}{dy}$; e quindi se $u'$ non ha alcuna discontinuità, vale anche per

$$\rho\left(u\frac{du'}{dx}-u'\frac{du}{dx}\right)\ \text{e}\ \rho\left(u\frac{du'}{dy}-u'\frac{du}{dy}\right),$$

dunque siamo nel caso considerato nel precedente articolo.

Ammettiamo ora che la superficie T che forma il luogo del punto O sia per tutto distesa semplicemente sopra A; e imaginiamo nella stessa un punto qualunque fisso $O_0$, in cui $u$, $x$, $y$ abbiano i valori $u_0$, $x_0$, $y_0$. La quantità

$$\tfrac{1}{2}\log\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]=\log r$$

considerata come funzione di $x$ e di $y$ ha allora la proprietà di rendere

$$\frac{d^2 \log r}{dx^2} + \frac{d^2 \log r}{dy^2} = 0,$$

ed ha una discontinuità soltanto per $x = x_0$ e $y = y_0$ cioè in un sol punto della superficie T.

Quindi, secondo l'Art. 9. III, ponendo $\log r$ in luogo di $u'$ l'integrale

$$\int\left(u \frac{d \log r}{dp} - \frac{du}{dp} \log r\right) ds$$

esteso a tutto il contorno di T sarà eguale allo stesso integrale esteso a un contorno qualunque che circondi il punto $O_0$, e quindi, se prendiamo per questo contorno una circonferenza in cui $r$ ha un valore costante, e indichiamo con $\varphi$ l' arco contato in parti di raggio da uno dei suoi punti in una data direzione sino al punto O, sarà eguale a

$$-\int_0^{2\pi} u \frac{d \log r}{dr} r\, d\varphi - \log r \int \frac{du}{dp} ds,$$

ovvero, poichè $\int \frac{du}{dp} ds = 0$ sarà eguale a $-\int_0^{2\pi} u\, d\varphi$, il qual valore, se $u$ è continua nel punto $O_0$, per $r$ infinitamente piccolo diviene $2\pi u_0$.

Colle supposizioni fatte rispetto ad $u$ e a T abbiamo quindi per un punto qualunque $O_0$ della superficie, dove $u$ è continuo,

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int\left(\log r \frac{du}{dp} - u \frac{d \log r}{dp}\right) ds$$

dove l'integrale è esteso a tutto il contorno della superficie, e

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi,$$

estendendo l'integrale a una circonferenza descritta intorno ad $O_0$ come centro.

Dalla prima di queste espressioni deduciamo il seguente

*Teorema*. Se una funzione $u$ nell'interno di una superficie T, che cuopre per tutto semplicemente il piano A, sodisfa in generale all'equazione a derivate parziali $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, in modo che

1. i punti in cui non sodisfa a questa equazione, non formino un area;

2. i punti, nei quali $u$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ sono discontinue, non formino una linea continua;

3. per ogni punto di discontinuità insieme colla distanza $\rho$ del punto O dal medesimo $\rho \frac{du}{dx}$, $\rho \frac{du}{dy}$ divengono infinitamente piccole;

4. per $u$ è esclusa una discontinuità che possa togliersi mutando il suo valore in punti singolari;

Questa funzione e le sue derivate sono necessariamente per tutti i punti della superficie finite e continue.

Infatti, se riguardiamo il punto $O_0$ come mobile, sono variabili nell'espressione

$$\int\left(\log r \frac{du}{dp} - u \frac{d \log r}{dp}\right) ds \quad \text{soltanto} \quad \log r, \ \frac{d \log r}{dx}, \ \frac{d \log r}{dy}.$$

Ma queste grandezze e le loro derivate, per ogni elemento del contorno, finchè $O_0$ rimane nella superficie di T, sono funzioni finite, e continue di $x_0$ e di $y_0$, poichè le derivate sono espresse da funzioni razionali fratte di queste grandezze, che contengono soltanto potenze di $r$ nel denominatore. Lo stesso vale anche per il valore del nostro integrale, e quindi per la funzione $u_0$. Poichè l'integrale potrebbe avere un valore differente da $u_0$, per le supposizioni fatte, soltanto in punti separati, nei quali la funzione sarebbe discontinua, la quale possibilità è tolta dalla supposizione 4 del nostro teorema.

# SOPRA ALCUNE PROPRIETA' DELLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE ELETTRICA NEI FILI TELEGRAFICI, DEDOTTE DALLA TEORIA DI OHM.

## NOTA

**DI FILIPPO KELLER.**



### §. 1°

Sia $AB$ un filo telegrafico, l'estremità $A$ sia in comunicazione con un polo di una pila, e l'altro polo in comunicazione col suolo. La forza e lo stato di questa pila si supponga costante, ed il movimento della elettricità dentro alla pila si assuma istantaneo. La prima di queste condizioni avrà sempre luogo, purchè si considerino solo i tempi molto brevi e la seconda forse non si allontanerà molto dal vero ogni qualvolta le dimensioni della pila siano abbastanza grandi. Dietro queste condizioni l'estremità $A$ del filo telegrafico avrà sempre una certa tensione elettrica costante $= a$. L'altro capo $B$ del filo sia in comunicazione colla terra semplicemente, e si potrà supporre che $B$ abbia sempre la tensione 0 (*). La lunghezza del filo sia $= l$, la sua conducibilità $= k$, la sezione $= \omega$, e la capacità per l'elettricità $= c$: la quale capacità si deve intendere per l'assoluta, cioè che l' unità del volume contenga la quantità $c$ in caso che la tensione sia $= 1$. Per prima cosa si domanda: Quale sarà la tensione $u$ in un punto $x$ del filo in un determinato tempo $t$, contando le $x$ da $A$ e il $t$ dall'istante, in cui fu stabilita la comunicazione al punto $A$. Di più si supponga che $\omega$ sia piccolissimo in confronto della lunghezza, e che la perdita di elettricità alla superficie del filo sia nulla, e si avrà l' equazione differenziale data da Ohm

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{k}{c} \frac{d^2u}{dx^2}.$$

### §. 2°

È noto, che l'integrale di (1) si può dare sotto la forma

$$(2) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f\left(x + 2y\sqrt{\frac{k}{c}\, t}\right) dy$$

dove $f$ indica una funzione arbitraria. Mettendo $t = 0$ si avrà in conseguenza di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$

(*) Ved. Traité d'eletricité par De la Rive. Tome III. pag. 439.

$$u = f(x).$$

Adunque $f(x)$ rappresenta la tensione per il tempo 0. Ora $f(x)$ è conosciuta solo per $x$ compresa fra i limiti 0 e $l$, e si deve cercare quale sia il suo valore fuori di questi limiti. Il metodo di risolvere questo problema è il seguente. Primieramente si vede, che si può fare $f=f'+f''$; inoltre siano $u'$ e $u''$ i valori corrispondenti a $f'$ e $f''$ si avrà

$$u = u' + u''.$$

Una delle due funzioni $f'$ e $f''$ è arbitraria e si può supporre che $f'$ sia tale, da soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2 f'}{dx^2} = 0$$

$f'$ rappresenterà, come si vede facilmente, la tensione elettrica per $t = \infty$.

L'integrale di questa equazione è

$$f' = mx + n$$

e determinando le due costanti $m$ e $n$ dietro la condizione, che alle due estremità le tensioni siano $a$ e 0 si avrà

$$f' = \frac{a}{l}(l - x) \qquad \text{oppure} \qquad u' = \frac{a}{l}(l - x).$$

Ora si deve determinare la funzione $f''$, il cui valore diviene noto fra i limiti 0 e $l$ e che sarà

$$f'' = -\frac{a}{l}(l - x)$$

perchè per il tempo $t = 0$ il filo essendo ancora senza tensione, si avrà

$$f = f' + f'' = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad f'' = -f'.$$

Oltre di questo si sà, che $u'$ dà per le due estremità i valori costanti $a$ e 0, come richiedono le condizioni accennate per il valore di $u$. Onde si può concludere che $f''$ deve avere tale proprietà, da produrre $u'' = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$, qualunque sia il valore positivo di $t$.

Questa ultima proprietà è sufficiente per trovare la forma della funzione $f''$ *fuori* dei limiti 0 e $l$. Immaginandosi il filo prolungato all'infinito verso ambedue le direzioni e che $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... $B_1$, $B_2$, $B_3$ ... siano punti i quali abbiano uno dall'altro la distanza $l$ (cioè $AA_1 = A_1 A_2 \ldots = BB_1 = B_1 B_2 \ldots = l$), e che $\varphi(x)$ sia la funzione $f''$, prendendo però per l'origine delle $x$ successivamente i punti A, $A_1$, $A_2$ ... B, $B_1$, $B_2$ ... evidentemente le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione $f''$ sono le seguenti:

1) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, per ciascuno dei punti A e B.
2) la tensione per questi punti ha da essere $= 0$.

Si vede dunque che $f''$ ha la forma di una serie di Fourier, ed è facile di mostrare, che sarà

$$(3)\qquad f''(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\int_0^l f''(z)\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}x\right]$$

onde non rimane più altro, che di sostituire questo $f''$ nell'equazione generale (2).

Questa equazione diviene dunque

$$u''=\frac{2}{l\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[e^{-y^2}\int_0^l f''(z)\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}\left(x+2y\sqrt{\frac{k}{c}t}\right)\right]\mathrm{d}y\,.$$

Eseguendo l'integrazione per $y$, si avrà, in conseguenza delle due formole

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{l}2\sqrt{\frac{k}{c}t}.\,y\right)\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{l}2\sqrt{\frac{k}{c}t}.\,y\right)\mathrm{d}y=0\,.$$

l'equazione

$$(4)\qquad u''=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\int_0^l f''(z)\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right].$$

Ma sopra fu trovato

$$f''(z)=-\frac{a}{l}(l-x)$$

fra i limiti 0 e $l$. Introducendo questo valore nella (4), si avrà

$$u''=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{n+1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

e finalmente

$$(5)\qquad u=u'+u''=\frac{a}{l}(l-x)-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{n+1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right].$$

Questa equazione dunque dà la relazione fra $u$, $x$ e $t$ e si vede come si tende a stabilire una tensione indipendente dal tempo $t$

$$u=\frac{a}{l}(l-x)\,.$$

Si ha ora da trovare la quantità della corrente espressa per $x$ e $t$ e ciò è facile,

perchè nominando $s$ questa quantità, si ha in generale

$$s = - k\omega \frac{du}{dx}$$

mettendo il segno negativo, perchè crescendo lo spazio, diminuisce la tensione per una corrente positiva.

Per il caso nostro si avrà

$$(6) \qquad s = k\omega\left(\frac{a}{l} + \frac{2a}{l}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l}\frac{k}{c}t}\right].$$

Il primo membro sotto la parentesi è precisamente la metà del secondo membro generale della somma $\sum$, sostituendo $n = -1$ e si può scrivere anche più semplicemente

$$s = \frac{2k\omega a}{l}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\cos\frac{n\pi}{l}x.e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

dove si ha da osservare, che per quel termine, il quale contiene la linea trigonometrica $cosen 0°$, si ha da prendere solo la metà, come si ha da fare per solito nelle funzioni di questo genere; ma si rimedia a questo piccolo inconveniente solamente apparente, quando si scrive sotto questa forma

$$s = \frac{k\omega a}{l}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\cos\frac{n\pi}{l}x.e^{-\frac{n^2\pi^2}{l}\frac{k}{c}t}\right].$$

La corrente stazionaria si ottiene al crescere del tempo per la (6) facendo $t$ infinito

$$s = \frac{k\omega a}{l}.$$

§. 3°

Immaginiamo adesso che le circostanze siano variate nei seguenti modi:

Dopo che si sia stabilita la corrente stazionaria, si interrompa la comunicazione al punto A, si cerca quale sarà per un certo $x$ e per un certo $t$ la tensione $u$ e la corrente $s$.

Per questo caso sussiste pure l'equazione (2), ma le condizioni, dalle quali si ha da ricavare la funzione $f$ sono diverse e più semplici.

Dentro i limiti 0 e $l$ il valore di $f$ (cioè il valore della funzione nella quale si trasforma $u$, mettendo $t = 0$) è conosciuto ed equivale a

$$\frac{a}{l}(l - x) :$$

le condizioni per trovare $f$ fuori dei limiti sono

$$u = 0 \quad \text{per} \quad x = l$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \ \text{per} \quad x = 0$$

e per ogni $t$ ; la prima fa, che l'estremità $B$ sia sempre in contatto col suolo, e la seconda impedisce che il filo si possa scaricare per l' estremità $A$. Questa ultima è evidentemente soddisfatta mettendo

$$f(-x) = f(x)$$

dunque adesso $f$ è conosciuto fra i limiti $-l$ e $l$, e oltre di questo si sà, che per le due estremità $-l$ e $l$ deve essere la tensione 0 per ogni $t$ positivo; e in questa maniera la questione è riportata a quella del § 2°, e la funzione $f''$ del § 2° è la funzione $f$ presente : solamente si deve osservare,

1) che la lunghezza è adesso $2l$ invece di $l$

2) l'origine delle $x$ sta alla metà della porzione $(-l, l)$ del filo, invece delle estremità, e le mutazioni per le formole sono le seguenti :

1) Sostituire $2l$ invece di $l$.

2) Sostituire $x + l$ invece di $x$ e $z + l$ invece di $z$, e dopo questo si scriverà di nuovo $f(z)$ invece di $f(z + l)$.

3) Introdurre la condizione

$$f(-z) = f(z).$$

Eseguendo queste operazioni si avrà

$$(7) \qquad f = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \int_0^l f(z) \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} z \, \mathrm{d}z \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x \right].$$

Sostituendo questo valore di $f$ nell'equazione generale (2) si ottiene similmente come nel §. 2°

$$u = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \int_0^l f(z) \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} z \, \mathrm{d}z \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x . e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{e} t} \right]$$

e per $f(z) = \frac{a}{l}(l - z)$ si avrà

$$(8) \qquad u = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x . e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

La corrente poi avrà l'espressione

$$(9) \qquad s = \frac{2k\omega a}{l} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x . e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t} \right].$$

Facendo $t=\infty$ diviene nulla, onde non si stabilisce una corrente stazionaria, perchè manca la sorgente.

§. 4.°

Veniamo adesso a un terzo caso. Supponiamo che essendo già stabilita una corrente stazionaria $\frac{ak\omega}{l}$ come nel §. 3.°, si rovesci la comunicazione della pila col filo, talchè l'estremità $A$ abbia una certa tensione $-a$ per ogni valore positivo di $t$. Si domanda quali saranno per questo caso l'equazioni per $u$ e $s$. La conclusione, a cui si arriva, è che si tende stabilire una corrente stazionaria $= -\frac{a\omega k}{l}$ come nel §. 2.° e il calcolo per trovare $u$ pochissimo differisce da quello del detto paragrafo. Si deve dividere la funzione $f$ della equazione (2) in due parti $f'$ e $f''$, dove $f'$ è precisamente $f'$ del §. 2.°; solo $f''$ differisce, ed equivale fra i limiti 0 e $l$ a $-\frac{2a}{l}(l-x)$ e questo valore di $f'$ si ha da sostituire nella (4) invece del $-\frac{a}{l}(l-x)$, e determinato $u''$ si trova finalmente

$$(10) \qquad u = \frac{a}{l}(l-x) - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{n+1} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x . e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t} \right]$$

e

$$(11) \qquad s = k\omega \left( \frac{a}{l} + \frac{4a}{l} \right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \cos \frac{(n+1)\pi}{l} x . e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l}\frac{k}{c}t} \right]$$

e in quest' ultima equazione non si può più mettere come nella (6) il primo membro $\frac{a}{l}$ della parentesi sotto il segno $\sum$.

§. 5.°

Immaginiamo un punto $M$ mobile, il quale abbia la proprietà da contenere sempre una certa data quantità di corrente $=s$; potremo considerare il moto di questo punto $M$ come rappresentante l'andamento del segno telegrafico, posto che $s$ sia la forza necessaria per fare agire una machina telegrafica. In questo caso si considera $s$ come costante, e l'equazioni (6), (9) e (11) divengono equazioni fra *due* variabili $x$ e $t$, e

per trovare la posizione del punto $M$ per un certo $t$, si avrebbero da risolvere dette equazioni rapporto ad $x$, finalmente $\frac{dx}{dt}$ rappresenterebbe la velocità colla quale si propaga il segno telegrafico. La loro forma trascendente rende impossibile di eseguire questa operazione. Nonostante questa difficoltà si possòno trovare parecchie condizioni particolari.

D'ora in avanti il valore della corrente stazionaria sarà denominato con $p$, dunque $p = \frac{ak\omega}{l}$ e l'equazione (6) diviene

$$\frac{s}{p} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\cos\frac{n\pi}{l}x.e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

e si vede che la velocità non può essere costante. Egualmente la supposizione, che la velocità stia in ragion inversa della lunghezza, contradice l'equazione. Questa ultima condizione richiederebbe, che si avesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{x} \qquad \text{cioè} \qquad t = \frac{x^2}{2k} + k'$$

ove $k$ e $k'$ hanno valori costanti. Ma sostituendo questo valore di $t$ nella (6), si avrà una equazione certamente non identica, e l'istesso si può anche dire delle equazioni (9) e (11).

Posto, che $p$ non varii, le tre equazioni (6), (9) e (11) non contengono la quantità $\omega$; dunque sotto questa supposizione la velocità è indipendente dalla sezione.

Il tempo, che impiega il segno telegrafico per percorrere tutta la lunghezza, si ricaverà mettendo $x = l$ e si avranno le equazioni

$$(12) \qquad \frac{s}{p} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right] \quad \text{per il caso del §. 2.}$$

$$(13) \qquad \frac{s}{p} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n \frac{e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}}{n+\frac{1}{2}}\right] \quad \text{per il caso del §. 3.}$$

$$(14) \qquad \frac{s}{p} = \left(1 + 4\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]\right) \quad \text{per il caso del §. 4}$$

nella (12) per il membro $n = 0$ prendendo solo la metà.

Ognuna di queste tre equazioni contiene due costanti sole, cioè $\left(\frac{s}{p}\right)$ e $\left(\frac{k}{l^2c}\right)$ ed esse si possono anche rappresentare sotto la forma

$$\frac{k}{cl^2}\, t = \mathrm{F}\left(\tfrac{s}{p}\right)$$

dove $\mathrm{F}(\frac{s}{p})$ indica una certa funzione incognita.

Questa equazione mostra, che il tempo che impiega il segno per percorrere tutta la linea è in ragione del quadrato della lunghezza e in ragione inversa della conducibilità.

Le due equazioni (12) e (13) danno in generale per $t$ valori differenti, dunque i segni telegrafici dei §. 2.° e §. 3.° cioè quelli corrispondenti all'apertura e chiusura del circuito non impiegano tempi eguali per percorrere tutta la lunghezza del filo; in conseguenza di ciò, tutto il tempo nel quale il *relais* tiene attratta *l'ancora* è differente dalla durata del tempo, che il manipolatore è abbassato, ammesso che questo tempo sia abbastanza lungo per poter adoperare l'equazioni del §.° 3.°, e l'azione della corrente sull' elettro calamita sia istantanea. Ma è evidente, che esiste un certo valore di $\frac{\pi^2 k}{l^2 c}\, t$ (e questo termine si metta per brevità $=z$) il quale rende identiche le seconde parti delle equazioni (12) e (13); questo valore di $z$ si cava dalla equazione

$$(15) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n\, e^{-n^2 z}\right] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n\, \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2 z}{4}}}{2n+1}\right]$$

e si trova

$$z = 2.085620.$$

Sostituendo questo valore di $z$ in una delle equazioni di (12) o (13) si ricava

$$\frac{s}{p} = 0.7520163.$$

Ogniqualvolta dunque sia $\frac{s}{p}$ maggiore di 0.7520163, l'ancora del relais resta meno tempo attratta che non resta abbassato il manipolatore: Questo potrebbe essere importante pei cronoscopi, onde determinare la forza della pila, che renda eguali i due tempi.

Ognuna delle equazioni (12), (13), (14), contiene due costanti $\left(\frac{s}{p}\right)$ e $\left(\frac{k}{cl^2}\right)$, come già fu detto di sopra; la prima si potrebbe determinare per ogni caso della pratica facilmente con un galvanometro. La seconda dipende solo dal filo, e non dalla corrente, $k$ significa la conducibilità assoluta, cioè la quantità di elettricità, che passa per qualunque sezione del filo (ammettendo la corrente stazionaria), posto che esso abbia la sezione $=1$, la lunghezza $=1$, che la differenza delle tensioni per le due estremità sia $=1$, e per il tempo $=1$, e questo in combinazione colla definizione

di $c$ spiegherebbe il valore del quoziente $\frac{k}{c}$. Ma del termine $\left(\frac{k}{cl^2}\right)$ si può dare la definizione seguente: esso si può scrivere nella forma

$$\frac{\left(\frac{k\omega a}{l}\right)}{c\,\omega\,a\,l}$$

Ammesse le medesime condizioni, come nel §. 2°, il numeratore rappresenterà la quantità di elettricità, che passa per una sezione del filo nell'unità di tempo, quando la corrente è stazionaria, e il denominatore sarà la quantità, che contiene il filo, in caso che sia isolata la sua estremità B e uniforme la tensione $é = a$.

§. 6.

Ritornando adesso di nuovo alla formola (6) del §. 2°, si potrebbe ancora accennare il caso seguente: Sia $t_1$ il tempo necessario per percorrere tutta la lunghezza del filo, e $t_2$ il tempo per la prima metà, si trovano le due equazioni le quali danno $t_1$ e $t_2$ quando si prende

$$t = t_1 \quad \text{e} \quad x = l\,; \qquad t = t_2 \quad \text{e} \quad x = \tfrac{1}{2}\,l.$$

Facendo queste due sostituzioni si ottengono

$$s = \frac{2k\omega a}{l}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t_1}\right]$$

$$s = \frac{2k\omega a}{l}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n\, e^{-\frac{4n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t_2}\right]$$

dunque mettendo $t_1 = 4t_2$, si avrà la identità delle due correnti, e in conseguenza di questo il tempo nel quale il segno percorre tutta la linea è quattro volte più grande, che il tempo impiegato per la prima metà. È notabile, che la relazione $t_1 = 4t_2$ *non* vale per l'equazione (9). In questo caso la relazione fra $t_1$ e $t_2$ dipende anche dal quoziente $\frac{s}{p}$ e si può trovare un valore di $\frac{s}{p}$, il quale produca $t_1 = 2t_2$, di più esistono anche valori di $\frac{s}{p}$, i quali fanno $t_1 < 2t_2$. Ma questa ultima equazione direbbe che il segno impiega per la prima metà di tutta la linea *più* tempo, che per la seconda. La formola per $s'$, cioè per la corrente propria del punto $x = \frac{l}{2}$, si può dare sotto la forma

$$s' = \frac{p}{\sqrt{2}}\,\gamma$$

dove $\gamma$ indica una serie, i cui membri senza aver riguardo al segno algebrico, coincidono con quelli della serie

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[(-1)^n \frac{e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}}{n+\frac{1}{2}}\right].$$

Ma mentre in questa ultima i segni algebrici sono alternativamente positivo e negativo, nella serie per $\gamma$ seguitano sempre due membri negativi a due positivi, cioè sarà

$$\gamma=\frac{4}{\pi}\left(e^{-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3^2}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}-\frac{1}{5}e^{-\frac{5^2}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}-\frac{1}{7}e^{-\frac{7^2}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}+\ldots\ldots\right)$$

Per un $t$ grandissimo i valori di $s$ e $s'$ si riducono ai primi membri delle serie, e si ha

$$s=p\,e^{-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t_1}\quad,\quad s'=\frac{p}{\sqrt{2}}\;e^{-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t_2}$$

e mettendo $t_1=t_2$, si avrà

$$\frac{s}{s'}=\sqrt{2}$$

ma facendo $s=s'$, si conclude

$$t_2=t_1-\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{c}{k}\,\mathrm{Lg}4.$$

Inoltre scrivendo $s_{(x,t)}$ invece di $s$, intendendo con questa notazione la corrente relativa al tempo $t$ nel punto $x$, si avranno ancora per il §. 2.° le due equazioni (dove si è messo nella seconda per maggior semplicità $\frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{k}{c}=1$)

$$s_{(l,t)}=2s_{(0,4t)}-s_{(0,t)}$$

e

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cdot s_{(0,t)}=s_{\left(0,\frac{\pi^2}{t}\right)}$$

le quali sono di importanza per il calcolo numerico di queste funzioni. La prima si verifica facilmente, scrivendo per le $s$ le serie equivalenti. La seconda è una conseguenza del Teorema seguente trovato da Cauchy:

Avendo luogo fra le due quantità $p$ e $q$ la relazione

$$\mathrm{Lg}\left(\frac{1}{q}\right)\mathrm{Lg}\left(\frac{1}{p}\right)=\pi^2$$

si avrà l'equazione

$$\sqrt[4]{\mathrm{Lg}\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{1}{2}+p+p^4+p^9\,....\,+p^{n^2}.....\right)$$
$$=\sqrt[4]{\mathrm{Lg}\frac{1}{q}}\cdot\left(\frac{1}{2}+q+q^4+q^9\,....\,+q^{n^2}.....\right)$$

dove $p$ e $q$ sono supposte positive e minori che l'unità.

Non sarebbe stato difficile di trattare più in generale le precedenti ricerche, cioè in tal modo, che fosse pure considerata la perdita di elettricità alla superficie del filo. Essendo $\beta^2$ un certo coefficiente l'equazione differenziale sarebbe

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{c}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\beta^2u\right).$$

Il metodo del calcolo per questo caso non differisce affatto dal precedente. L' equazione (2) diviene

$$u=\frac{e^{-\frac{k}{c}\beta^2t}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}f\left(x+2y\sqrt{\frac{k}{c}t}\right)\mathrm{d}y.$$

Per il caso del §. 2° sarebbe per es. la funzione $u'$

$$f'=u'=a.\frac{e^{\beta(l-x)}-e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l}-e^{-\beta l}}$$

e

$$f''=-2a\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{\pi(n+1)}{(n+1)^2\pi^2+\beta^2l^2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{l}x\right]$$

$$u=a\frac{e^{\beta(l-x)}-e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l}-e^{-\beta l}}-2e^{-\frac{k}{c}\beta^2t}a\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{(n+1)\pi}{(n+1)^2\pi^2+\beta^2l^2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

e finalmente

$$s=\omega k\,a\beta\frac{e^{\beta(l-x)}+e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l}-e^{-\beta l}}+2k\omega\frac{a}{l}e^{-\frac{k}{c}\beta^2t}\sum_{u=0}^{n=\infty}\left[\frac{(n+1)^2\pi^2}{(n+1)^2\pi^2+\beta^2l^2}\cos\frac{(n+1)\pi}{l}x.e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

Si vede quindi l'importanza della teoria di Ohm nel caso da esso non contemplato, cioè di un filo lunghissimo nel quale la propagazione non sia istantanea. Non esistendo allora i telegrafi, a suoi tempi tal problema non avea l'applicazione che ha al presente, ove la propagazione successiva può essere un ostacolo grandissimo a trasmettere segnali per linee molte lunghe.



*

## SOPRA ALCUNE LINEE E SUPERFICIE CURVE DERIVATE.

### MEMORIA

**DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.**



1.° Riferendo secondo il consueto una linea piana od una superficie curva a due, o tre assi ortogonali, si conduca dall'origine delle coordinate un raggio $r$ ad un punto qualunque di queste due figure. Ciò posto sia $k$ un numero dato, e si prendano lungo il raggio $r$ delle nuove distanze R, tali fra $r$, ed R, sussista l'equazione

$$r^2 = k\mathrm{R}, \qquad \text{od} \qquad \mathrm{R} = \frac{r^2}{k},$$

quindi è che dato il luogo geometrico corrispondente ad $r$, ne dedurremo un' altro R dipendente da $r$ secondo la stabilita legge: la nuova linea piana, o superficie curva si dirà una *linea*, o *superficie derivata*. Viceversa cognito R se ne deriverebbe $r$, e le denominazioni si potrebbero alternare: di più questa derivazione di figure si potrà chiamare di genere parabolico, mentre con l'equazione $r^2 = k\mathrm{R}$, si può costruire una parabola di second'ordine.

2.° È assai facile di stabilire delle equazioni fra le coordinate, ed i raggi vettori dei punti corrispondenti, o delle due linee, o delle due superficie; così chiamando $x, y, r$ le coordinate, ed il raggio vettore di una data linea piana, ed X, Y, R le corrispondenti per la *linea derivata*, si avrà

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y} = \frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{r}{k} = \frac{\sqrt{\mathrm{R}}}{\sqrt{k}}$$

d'onde

$$\mathrm{X} = \frac{rk}{k}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{ry}{k}$$

e viceversa

$$x = \frac{\sqrt{k}.\,\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \qquad y = \frac{\sqrt{k}.\,\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

In generale sarà facile di trovare la nuova equazione fra le coordinate X, Y. Nella stessa guisa quando fosse data l'equazione polare della curva primitiva

$$\mathrm{F}(r, u) = 0$$

ove $u$ rappresenti l'angolo polare comune a due punti corrispondenti delle due curve, si potrà immediatamente riconoscere l'equazion polare della curva derivata, la quale

sarà

$$F(\sqrt{k}R, u) = 0$$

ove sostituendoci in seguito

$$\text{tang}\, u = \frac{Y}{X}\,, \qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

se ne dedurrà tosto la sua equazione fra le coordinate ortogonali. Ragionamenti somiglianti avranno luogo per le superficie derivate, come si vedrà nel proseguimento di questa Memoria.

3.° Differenziando ora i valori delle X, Y appartenenti ad un punto della nuova curva si trae

$$dX = \frac{x\,dr + r\,dx}{k}\,, \qquad dY = \frac{y\,dr + r\,dy}{k}$$

d'onde per il differenziale dS del suo arco sarà

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = \frac{r^2dr^2 + r^2(dx^2 + dy^2) + 2r\,dr(xdx + ydy)}{k^2}$$

ma dalla curva primitiva

$$r^2 = x^2 + y^2\,, \quad r\,dr = x\,dx + y\,dy\,, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

d'onde

$$dS = \frac{r}{k}\sqrt{(ds^2 + 3dr^2)}\,.$$

Questa formola servirà per mezzo dell'integrazione alla rettificazione di qualcuna delle curve derivate; di più per il valore di ds in coordinate polari si ha

$$ds^2 = dr^2 + r^2du^2$$

quale sostituito, porge

$$dS = \frac{r}{k}\sqrt{(r^2du^2 + 4dr^2)}\,.$$

Nelle applicazioni potrà ridursi o ad una sola funzione di $r$, o di $u$, o di altra qualunque variabile ausiliare.

4.° Per mostrare una qualche utile applicazione, prendiamo un'ellisse con l'origine al centro di semiassi $a$, $b$, cioè sia l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Dai valori generici

$$X = \frac{rx}{k}\,, \qquad Y = \frac{ry}{k}$$

si troverà immediatamente

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{r^2}{k^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{r^2}{k^2}=\frac{R}{k}.$$

Di qui per l'equazione della curva derivata si ha

$$R=k\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right).$$

Sostituendoci in fine $R=\sqrt{X^2+Y^2}$, ed elevando al quadrato, si troverà

$$a^4b^4(X^2+Y^2)=k^2(a^2Y^2+b^2X^2)^2.$$

L'equazione adunque della nuova curva derivata dall'ellisse mediante la legge $r^2=kR$, appartiene al quarto grado, cosicchè di quarto ordine è la curva. Quando nell'ellisse si fosse preso $x=r\cos u$, $y=r\,\text{sen}\,u$, onde dedurre l'equazione polare

$$r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2u+b^2\cos^2u}$$

si giungerebbe con la stessa facilità all'equazione fra X, ed Y, purchè in questa ultima si sostituisse

$$r^2=kR,\qquad \cos u=\frac{X}{R},\qquad \text{sen}\,u=\frac{Y}{R}.$$

Una equazione somigliante di quarto grado si otterrebbe per la curva derivata dall' iperbola con l'origine al centro, vale a dire

$$a^4b^4(X^2+Y^2)=k^2(a^2Y^2-b^2X^2)^2.$$

La ritrovata curva di quart'ordine derivata dall' ellisse è una curva concentrica all' ellisse, e limitata in tutte le direzioni, ed interseca gli assi nei punti

$$X_1=\frac{a^2}{k},\qquad Y_1=\frac{b^2}{k}.$$

Essa potrebbe anche intersecare l'ellisse, il che dipenderà dalla scelta del numero $k$, così prendendo $k<b$, la curva sarà tutta situata fuori del perimetro ellittico: gli assi della medesima saranno $2X_1$, $2Y_1$, quali chiamati $2A$, $2B$ sostituiremo

$$a^2=kA,\quad b^2=kB,$$

e l'equazione si ridurrà a

$$A^2B^2(X^2+Y^2)=(AY^2+BX^2)^2.$$

Ripetendo le medesime operazioni per la curva di quart'ordine derivata dall'iperbola

riferita al centro si ottiene l'equazione

$$A^2B^2(X^2 + Y^2) = (AY^2 - BX^2)^2.$$

Queste curve del quart'ordine meritano una qualche attenzione da che si ritrovano assai naturalmente nell'importante teorica della curvatura delle superficie: esse sono strettamente dipendenti con la *curva indicatrice* del Sig. Dupin la quale sarà sempre del second'ordine.

5.° A riconoscere nella curvatura delle superficie l'identità di queste due curve, sia $\rho$ il raggio di curvatura di una sezione normale in un determinato punto di una superficie curva; siano $\rho_1$, $\rho_2$ i raggi di curvatura principale per lo stesso punto; che supporremo essere del medesimo segno. In questo caso la *curva indicatrice* sarà un'ellisse: gli assi principali di quest'ellisse, sono numericamente espressi per $\sqrt{\rho_1}$, $\sqrt{\rho_2}$, come i semidiametri sono proporzionali a $\sqrt{\rho}$. Ciò posto sia $\alpha$ l'angolo, che il piano di una sezione normale qualunque forma con il piano corrispondente al raggio $\rho_1$, od in altri termini sia $\alpha$ l'angolo formato da $\sqrt{\rho}$, con $\sqrt{\rho_1}$ nell'ellisse indicatrice, si hà come è noto

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \operatorname{sen}^2\alpha + \rho_2 \cos^2\alpha}$$

e l'ellisse indicatrice avrà per equazione

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = 1$$

fra le coordinate ortogonali: la sua equazione polare con il polo nel centro sarà

$$\sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{\rho_1} \cdot \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{(\rho_1 \operatorname{sen}^2\alpha + \rho_2 \cos^2\alpha)}}.$$

Di qui per la stabilita teorica, l'espressione del raggio $\rho$ di già riportata rappresenterà l'equazione polare della curva di quart' ordine di sopra rimarcata: sostituendo infatti

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

si trova

$$\rho_1 \rho_2 \rho = \rho_1 y^2 + \rho_2 x^2$$

ovvero

$$\rho_1^2 \rho_2^2 (x^2 + y^2) = (\rho_1 y^2 + \rho_2 x^2)^2$$

equazione alla curva di quart'ordine derivata dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = 1.$$

Se i raggi $\rho_1$, $\rho_2$ fossero di segno contrario, la *curva indicatrice* sarà un' iperbola, e la curva di quart'ordine luogo geometrico dei raggi di curvatura $\rho$, avrà per equazione

$$\rho_1^2\, \rho_2^2 (x^2 + y^2) = (\rho_1\, y^2 - \rho_2\, x^2)^2.$$

Si rende adunque manifesta l'influenza di queste curve nella curvatura delle superficie, e potrebbero anche esse chiamarsi *Curve Indicatrici.*

6.° La rettificazione della rimarcata curva di quart' ordine derivata dall' ellisse, dipende da archi ellittici, e si esprimerà per conseguenza da un trascendente ellittico di seconda specie. Riprendiamo la formola differenziale

$$dS = \frac{r}{k} \sqrt{(ds^2 + 3dr^2)}$$

ed adopriamo per l'ellisse la sostituzione circolare

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \operatorname{sen} \varphi$$

per cui si ha

$$ds^2 = (a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi) d\varphi^2$$

$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi, \qquad rdr = -(a^2 - b^2) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi$$

si troverà dopo facili riduzioni

$$dS = \frac{d\varphi}{k} \sqrt{[a^2 b^2 + 4(a^2 - b^2)^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi]}$$

ovvero

$$dS = \frac{d\varphi}{k} \sqrt{[(a^2 - b^2)^2 + a^2 b^2 - (a^2 - b^2)^2 \cos^2 2\varphi]}$$

ove fatto per brevità

$$(a^2 - b^2)^2 = [a^2 b^2 + (a^2 - b^2)^2] e^2$$

si ridurrà a

$$dS = \frac{(a^2 - b^2)}{ek} d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \cos^2 2\varphi)}$$

L'integrale sarà l'arco della curva, e come ognun vede viene esso rappresentato da un trascendente ellittico di seconda specie: posto $2\varphi = v$, ai limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ per un quadrante della curva corrisponde $v = 0$, $v = \pi$, ed avremo

$$S = \frac{(a^2 - b^2)}{2ek} \int_0^\pi dv \sqrt{(1 - e^2 \cos^2 v)}\ .$$

Il quadrante vien computato dall'estremità del semiasse $\frac{a^2}{k}$; riducendo il limite $\pi$ ad $\frac{1}{2}\pi$

l'integrale si raddoppia, per cui si ottiene

$$S = \frac{(a^2 - b^2)}{ek}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dv\sqrt{(1 - e^2\cos^2 v)}.$$

Sostituendo infine $\frac{1}{2}\pi - v$ invece di $v$, il quadrante S sarebbe egualmente esprimibile per

$$S = \frac{(a^2 - b^2)}{ek}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dv\sqrt{(1 - e^2\text{sen}^2 v)}$$

ma esso si computa a partir dal semiasse minore $\frac{b^2}{k}$; il numero $e < 1$ dicesi il modulo della funzione ellittica. La quadratura di questa curva è di forma razionale rapporto ai semiassi $a$, $b$, ed è analoga alla quadratura dell'ellisse : difatti dall'equazione polare

$$kR = \frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2 u + b^2\cos^2 u}$$

della rimarcata curva di quart'ordine, l'intera sua superficie sarà espressa dall' integrale definito

$$S = \frac{2a^4b^4}{k^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{(a^2\text{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)^2}$$

Ora dai noti metodi d'integrazione, e come per integrali somiglianti ho indicato dei sviluppi in mie differenti Memorie, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{(a^2\text{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{ab^3} + \frac{1}{ba^3}\right)$$

d'onde per la quadratura della detta curva

$$S = \frac{\pi ab}{2k^2}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{2}(A + B)\sqrt{AB}$$

ove A , B sono i due semiassi $\frac{a^2}{k}$, $\frac{b^2}{k}$. La ritrovata espressione rappresenta evidentemente le semiaree delle due ellissi

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{AB} = 1\ , \qquad \frac{x^2}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,.$$

Indefinito può essere il numero delle applicazioni o ripetendo una derivazione somigliante sulla curva già derivata, o scegliendone delle altre, il che per la prima parte ci dispensiamo di fare, e sceglieremo d'altronde una nuova curva, dalla quale derivarne altra con la fissata legge parabolica.

7.° Prendiamo, per altra applicazione, la curva del quart'ordine luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell'ellisse sulle tangenti; come è noto l'equazione di questa curva è

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$$

ove $a$, $b$ sono i semiassi della curva comuni all' ellisse: questa curva, insieme ad altre simiglianti, e sulle quali ho più volte intrapreso delle ricerche è nello stesso tempo l'inversa della polare reciproca. Ponendo dunque nella sua equazione

$$x=r\cos u\,,\qquad y=r\operatorname{sen} u$$

si ottiene per la stabilita legge di derivazione

$$r^2=a^2\cos^2 u+b^2\operatorname{sen}^2 u=k\mathrm{R}$$

e sostituendoci quindi

$$\cos u=\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}}\cdot\quad \operatorname{sen} u=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}},\qquad \mathrm{R}=\sqrt{(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)}$$

avremo

$$k\mathrm{R}^3=a^2\mathrm{X}^2+b^2\mathrm{Y}^2$$

ovvero per l'elevazione al quadrato

$$k^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)^3=(a^2\mathrm{X}^2+b^2\mathrm{Y}^2)^2.$$

La nuova curva derivata appartiene al sesto ordine: i punti d'incontro con gli assi si ottengono dai valori consueti

$$\mathrm{X}_1=\frac{a^2}{k}\,,\qquad \mathrm{Y}_1=\frac{b^2}{k}$$

e rappresenterrano i semiassi della curva: sostituendo quindi $a^2=k\mathrm{A}$, $b^2=k\mathrm{B}$ otteniamo per l'equazione

$$(1)\qquad (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)^3=(\mathrm{AX}^2+\mathrm{BY}^2)^2.$$

Scegliendo l'equazione

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$$

abbiamo la curva projezione del centro dell'iperbola sulle sue tangenti, e per $a=b$ riducesi alla *Lemniscata*: la curva derivata avrà in modo somigliante l' equazione della forma

$$(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)^3=(\mathrm{AX}^2-\mathrm{BY}^2)^2.$$

Quando fosse $a=b$, o $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, essa diviene

$$(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)^3=\mathrm{A}^2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2)^2$$

e rappresenterà la curva derivata della *Lemniscata* secondo la stabilita legge: di più la sua equazione polare è $\mathrm{R}=\mathrm{A}\cos 2u$. Volendo intraprendere delle ricerche sulla

rettificazione di queste curve, s'incontrano degli integrali trigonometrici da ridursi a funzioni ellittiche; così ripresa la curva di sest' ordine di equazione (1), mutiamo per semplicità le lettere A, B, X, Y in $a$, $b$, $x$, $y$, avremo primieramente

$$(x^2+y^2)^3=(ax^2+by^2)^2.$$

Per la sostituzione $x=r\cos u$, $y=r\,\text{sen}\,u$, otterremo l'equazione polare

$$r=a\cos^2 u+b\,\text{sen}^2 u$$

Differenziando, e sostituendo i seni, e coseni degli archi doppi invece dei seni e coseni degli archi semplici, si ha simultaneamente

$$dr=-(a-b)\text{sen}\,2u\,du\,,\qquad r=\frac{a+b+(a-b)\cos 2u}{2}.$$

Ora se $s$ sia l'arco corrispondente della curva, avremo generalmente

$$ds=\sqrt{(dr^2+r^2du^2)}.$$

Quindi fatta la sostituzione, e riduzione otteniamo un risultato della forma

$$ds=\frac{du}{2}\sqrt{(\text{B}+\text{B}\cos 2u+\text{C}\cos^2 2u)}$$

ove per brevità si è fatto

$$\text{A}=4(a-b)^2+(a+b)^2\,,\quad \text{B}=2(a+b)(a-b)\,,\quad \text{C}=-3(a-b)^2.$$

L'integrale del secondo membro dipenderà dai trascendenti ellittici onde ottenere l'espressione del suo arco $s$: i limiti dell'integrale per un quadrante della curva sono $u=0$, $u=\frac{\pi}{2}$: ma per non allungare di troppo questa Memoria tralasceremo di fare l'indicata riduzione ai trascendenti ellittici.

8.° In un modo somigliante a quanto si è praticato per una linea piana potremo estenderlo ad una superficie curva: sia $r$ il raggio condotto dall' origine al punto $(x, y, z)$, e si prendano nella direzione di $r$ altrettante lunghezze R determinate dall'equazione $r^2=k\text{R}$, la nuova superficie luogo geometrico dell' estremità di R sarà una *superficie derivata* da una data secondo la indicata legge parabolica dei raggi vettori. Chiamando X, Y, Z le coordinate di un punto di questa superficie derivata, corrispondenti ad un punto $(x, y, z)$ della superficie data, si avrà

$$\frac{\text{X}}{x}=\frac{\text{X}}{y}=\frac{\text{Z}}{z}=\frac{\text{R}}{r}=\frac{r}{k}=\frac{\sqrt{\text{R}}}{\sqrt{k}}$$

d'onde per i valori delle nuove coordinate

$$\text{X}=\frac{rx}{k}\,,\quad \text{Y}=\frac{ry}{k}\,,\quad \text{Z}=\frac{rz}{k}$$

*

e viceversa si ottengono le prime

$$x=\frac{\sqrt{k}.\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \qquad y=\frac{\sqrt{k}.\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \qquad z=\frac{\sqrt{k}.\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Da queste ultime ne segue altresì, che data la superficie luogo geometrico di R ne deriva l'altra $r=\sqrt{k\mathrm{R}}$. Per una analoga applicazione sia $r$ un semidiametro dell' ellissoide con l'origine al centro, e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

sostituendoci i precedenti valori di $x$, $y$, $z$ espressi per X, Y, Z otteniamo immediatamente per la nuova superficie derivata

$$\frac{k}{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c^2}\right)=1$$

ove ponendo

$$\mathrm{R}=\sqrt{(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)}$$

si otterrà infine l'equazione di quarto grado

$$a^4\,b^4\,c^4(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)=k^2(b^2c^2\mathrm{X}^2+a^2c^2\mathrm{Y}^2+a^2b^2\mathrm{Z}^2)^2$$

È dunque di quart'ordine questa superficie derivata dall'ellissoide, come di quart'ordine è la curva derivata dall'ellisse secondo la stabilita relazione fra i raggi vettori. Le intersezioni con gli assi coordinati sono alle distanze dal centro

$$\mathrm{X}_1=\frac{a^2}{k}, \qquad \mathrm{Y}_1=\frac{b^2}{k}, \qquad \mathrm{Z}_1=\frac{c^2}{k}.$$

Le $\mathrm{X}_1$, $\mathrm{Y}_1$, $\mathrm{Z}_1$ rappresenteranno i semiassi della superficie computati nella direzione di $a$, $b$, $c$: se per uniformità di notazione si chiamino A, B, C potremo sostituire

$$a^2=k\mathrm{A}, \qquad b^2=k\mathrm{B}, \qquad c^2=k\mathrm{C}$$

e l'equazione si ridurrà ad

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)=(\mathrm{BCX}^2+\mathrm{ACY}^2+\mathrm{ABZ}^2)^2.$$

In questa guisa si è resa indipendente da $k$, e 2A, 2B, 2C sono tre assi principali della superficie concentrica all'ellissoide, e limitata anche essa in tutte le direzioni.

9.° Nella di già menzionata teorica dei raggi di curvatura delle sezioni normali in un punto di una superficie data, ci si presenterà anche spontaneamente una superficie di quart'ordine, che racchiude come caso particolare la superficie derivata dall'ellissoide. Immaginiamo in un punto $(x, y, z)$ di una data superficie curva tutte le sue differenti sezioni normali, si conduca il piano tangente nello stesso punto

$(x, y, z)$, e si chiamino $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli, che una retta tangente ad una sezione normale nel punto $(x, y, z)$ forma con i tre assi ortogonali; è noto che se $u=0$ rappresenti l'equazione della superficie, e si ponga per brevità

$$R=\sqrt{[(D_x u)^2+(D_y u)^2+(D_z u)^2]}$$

$$Q=\cos^2\alpha\, D_x^2 u+\cos^2\beta\, D_y^2 u+\cos^2\gamma\, D_z^2 u+2\cos\alpha\cos\beta\, D_x D_y u$$

$$+2\cos\alpha\cos\gamma\, D_x D_z u+2\cos\beta\cos\gamma\, D_y D_z u$$

si ha per il raggio $\rho$ di curvatura della corrispondente sezione normale

$$\rho=\pm\frac{R}{Q}$$

Ciò posto se a partir dal punto $(x, y, z)$ comune alla superficie, ed al piano tangente, si portino sopra ciascuna retta tangente alle sezioni normali, le rispettive lunghezze $\rho$ dei raggi di curvatura, e si chiamino X, Y, Z le coordinate corrispondenti ai diversi estremi del raggio $\rho$, si avrà

$$X=\rho\cos\alpha\,,\qquad Y=\rho\cos\beta\,,\qquad Z=\rho\cos\gamma\,,\qquad \rho^2=X^2+Y^2+Z^2$$

quindi sostituendo nella formola $\rho^2 Q^2=R^2$, i valori di $\cos a$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, e $\rho^2$, otterremo la superficie del quart'ordine determinata dall'equazione generale

$$[(D_x u)^2+(D_y u)^2+(D_z u)^2](X^2+Y^2+Z^2)$$

$$=(X^2D_x^2u+Y^2D_y^2u+Z^2D_z^2u+2XYD_xD_yu+2XZD_xD_zu+2YZD_yD_zu)^2.$$

L'intersezione di questa superficie con il piano tangente dà luogo alla curva de quart'ordine luogo geometrico dei raggi $\rho$ di curvatura. La medesima contiene come caso particolare la superficie dal quart'ordine derivata dall'ellissoide, mentre essa è la superficie derivata generalmente da una superficie di second'ordine dotata di centro. Infatti se si fossero portate sulle rette tangenti alle sezioni normali delle lunghezze espresse numericamente da $\sqrt{\rho}$, allora si ottiene, come è noto, una superficie del secondo ordine, e la sua intersezione con il piano tangente produce la *curva Indicatrice* del Sig. *Dupin*.

10.° Applichiamo le precedenti dottrine ad un qualche problema di calcolo integrale. Sia da determinarsi per esempio il volume terminato dalla superficie di quart' ordine derivata dall'ellissoide, e di equazione come dal parag.° 8.°

$$A^2B^2C^2(X^2+Y^2+Z^2)=(BCX^2+ACY^2+ABZ^2)^2.$$

Mutiamo le lettere A, B, ... X, ... nelle piccole $a$, $b$, ... $x$, ... con scrivere

$$a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)=(bcx^2+acy^2+abz^2)^2.$$

Sostituiamo per $x, y, z$ i valori in coordinate polari, vale a dire

$$x = r \cos p\,, \qquad y = r \operatorname{sen} p \cos q\,, \qquad z = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

avremo per l'equazione polare della superficie

$$r = \frac{abc}{bc \cos^2 p + ac \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + ab \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q}\,.$$

Ora la cubatura di un volume V in coordinate polari vien data dall'integrale doppio

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\int\!\!\int r^3 \operatorname{sen} p\, dp\, dq$$

per cui nel nostro caso avremo

$$\mathrm{V} = \frac{a^3 b^3 c^3}{3}\int\!\!\int \frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(bc \cos^2 p + ac \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + ab \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)^3}\,.$$

I limiti dell'integrale esteso all'ottava parte del volume sono

$$p = 0\,, \quad p = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad q = 0\,, \quad q = \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

per cui l'intero volume terminato dalla superficie del quart'ordine di sopra indicata, sarà espresso dall'integrale definito doppio

$$\mathrm{V} = \frac{8a^3 b^3 c^3}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(bc \cos^2 p + ac \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + ab \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)^3}\,.$$

Quest' integrale è riducibile a funzioni ellittiche di prima e seconda specie, ed ho avuto già occasione di ultimare questa riduzione in problemi somiglianti in diverse mie Memorie, e fra le altre in una pubblicata nel 1846 nel tom. 31. del giornale del Sig. *Crelle*, ed in altre due pubblicate nel 1847. e 1848 nel giornale arcadico di Roma: di più nella citata Memoria inserita nel giornale di *Crelle*, l'integrale in questione mi si presentò come cubatura del volume terminato da una superficie del quart'ordine conosciuta sotto il nome di *superficie di elasticità*, e che viene anche essa derivata dall'ellissoide come luogo geometrico della projezione ortogonale del suo centro sui i piani tangenti; per cui si viene in questa guisa a stabilire l'identità dei due volumi terminati dalle due superficie di quart'ordine. Onde riconoscere le dimensioni di queste due superficie per l'identità dei loro volumi, prendiamo per un'istante l'equazione della *superficie di elasticità*, cioè

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

Ora io tanto nel parag.° 8.° della mia Memoria inserita nel tom. 31. del Sig. *Crelle*, quanto nel parag.° 6.° della mia altra Memoria inserita nel giornale arcadico per l'anno 1847, ho dimostrato che l'integrale definito duplicato di forma razionale che rappresenta il volume terminato dalla superficie di elasticità è

$$V = \frac{8a^5b^5c^5}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(b^2c^2\cos^2 p + a^2c^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q + a^2b^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q)^3}.$$

Scegliamo ora una nuova superficie di elasticità di semiassi $\sqrt{ka}$, $\sqrt{kb}$, $\sqrt{kc}$, è chiaro che il corrispondente volume V sarà espresso per

$$V = \frac{8\sqrt{a^5b^5c^5k^5}}{3k^6}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(bc\cos^2 p + ac\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q + ab\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q)^3}$$

Il coefficiente algebrico si riduce evidentemente a $\sqrt{(a^5b^5c^5k^3)}$; prendendo poi per l'indeterminata $k$, $k^3 = abc$, o, $k = \sqrt[3]{abc}$, si ridurrà il detto coefficiente ad $a^3b^3c^3$; e viene tosto riconosciuta l'identità dell'integrale riportato al principio di questo parag. per la cubatura della nuova superficie: e potremo dire, che le due superficie del quart'ordine

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \sqrt[3]{abc}(ax^2 + by^2 + cz^2)$$

$$a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) = (bcx^2 + acy^2 + abz^2)^2$$

sono d' identico volume. Alla medesima conclusione potremmo giungere assai facilmente nel modo seguente: poniamo in quest'ultima equazione

$$bcx^2 = k^2X^2, \qquad acy^2 = k^2Y^2, \qquad abz^2 = k^2Z^2$$

si avrà dopo la sostituzione, e riduzione

$$k^2(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = abc(aX^2 + bY^2 + cZ^2)$$

ove ponendo $k^3 = abc$, otterremo le superficie di elasticità: premessa quest'osservazione, dai valori stabiliti fra $x, \ldots$ ed $X, \ldots$ risulta

$$x\sqrt{bc} = kX, \qquad y\sqrt{ac} = kY, \qquad z\sqrt{ab} = kZ$$

d'onde per gli elementi dei volumi avremo

$$abc\, dx\, dy\, dz = k^3\, dX\, dY\, dZ$$

quindi per il valore di $k^3 = abc$, otteniamo l'eguaglianza tanto degli elementi, quanto dei volumi finiti delle due superficie.

11.° A compimento di questa applicazione riportiamo qui l'espressione del volume della superficie di elasticità da me rinvenuto per la prima volta nella Memoria inserita nel tom. 31. del Sig. *Crelle*. Nel parag. 11.° della citata Memoria giunsi all' espressione

$$V = \frac{\pi abc}{6}\left(\frac{c^2 + 2(a^2 + b^2)}{c^2}\right) + \frac{2\pi KE(k, \mu)}{6c\operatorname{sen}\mu} + \frac{\pi K_1F(k, \mu)}{6c\operatorname{sen}\mu}$$

ove per le due funzioni ellittiche di prima e seconda specie, si ha tanto pel modulo $k$, quanto per l'ampiezza $\mu$ sotto l'ipotesi di $a < b < c$

$$\cos\mu = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{sen}\mu = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)}}{c}$$

$$k^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}, \qquad K = (c^2 - a^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$K_1 = (a^2 + b^2 + c^2)a^2 + a^4 - b^2c^2.$$

Sostituiamo $\sqrt{ah}$, $\sqrt{bh}$, $\sqrt{ch}$ in luogo di $a$, $b$, $c$ si avrà

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}, \qquad \operatorname{sen}\mu = \frac{\sqrt{(c-a)}}{\sqrt{c}}, \qquad k^2 = \frac{c-b}{c-a}$$

$$K = h^2(c-a)(a+b+c), \qquad K_1 = h^2\left[(a+b+c)a + a^2 - bc\right].$$

Quindi fatto $h^3 = abc$ otterremo l'espressione del richiesto volume per la superficie derivata dall'ellissoide, vale a dire

$$V = \frac{\pi\, abc}{6}\left(\frac{c + 2(a+b)}{c}\right) + \frac{2\pi\sqrt{abc}\,G.E(k,\mu)}{6\sqrt{c-a}} + \frac{\pi\sqrt{abc}\,H.F(k,\mu)}{6\sqrt{c-a}}$$

ove per brevità si è posto

$$G = (c-a)(a+b+c), \qquad H = (a+b+c)a + a^2 - bc.$$

Tale è dunque l'espressione del valore V terminato dalla superficie di quart'ordine

$$a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) = (bcx^2 + acy^2 + abz^2)^2$$

che come si è rimarcato coincide con il volume terminato da una superficie di elasticità.

12.° Per un'ultima applicazione deriviamo dalla superficie di elasticità

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

un altra superficie secondo la legge parabolica $r^2 = kR$ : facendo la sostituzione

$$x = r\cos p, \qquad y = r\operatorname{sen} p\cos q, \qquad z = r\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q$$

otteniamo l'equazione polare

$$r^2 = a^2\cos^2 p + b^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q + c^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q = kR$$

la quale rappresenta nello stesso tempo l'equazione polare della superficie derivata. Sostituiamo come si è fatto in altri casi

$$\cos p = \frac{X}{R}, \qquad \operatorname{sen} p\cos q = \frac{Y}{R}, \qquad \operatorname{sen} p\operatorname{sen} q = \frac{Z}{R}$$

si trova

$$kR^3 = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2$$

ovvero

$$k^2(X^2+Y^2+Z^2)^3=(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)^2.$$

È dunque di sest' ordine la nuova superficie derivata da quella di elasticità: i semiassi di questa superficie sono $\frac{a^2}{k}$, $\frac{b^2}{k}$, $\frac{c^2}{k}$, e sostituendoci per semplicità $a$, $b$, $c$, l'equazione diviene

$$(X^2+Y^2+Z^2)^3=(aX^2+bY^2+cZ^2)^2.$$

Il volume terminato da questa superficie è una funzione razionale di $a$, $b$, $c$, ed è facile il poterlo ricavare: non però con la stessa facilità si presenta il problema sulla quadratura tanto in questa, quanto nelle precedenti superficie derivate, argomento che potrà essere il soggetto di un'altra Memoria.

13.º Ritenendo la stessa legge di derivazione proveniente dall'equazione $r^2=kR$, abbiamo supposta nota la curva, o superficie di raggio $r$ per poterne derivare l'altra di raggio R, ma è chiaro che potrebbe supporsi cognito R, ed incognito $r$: per non allungare di troppo questa Memoria, e per essere uniformi nelle notazioni cangiamo $r$ in R, ed R in $r$, e prendiamo un qualche esempio da una linea, o da una superficie data, ove sia costantemente $R=\sqrt{kr}$. Così se $r$ appartenga ad un'ellissoide come semidiametro, con le coordinate polari si avrà

$$r^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2\cos^2p+a^2c^2\operatorname{sen}^2p\cos^2q+a^2b^2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2q}$$

e per il valore R della superficie derivata, verrà

$$R^4=\frac{k^2a^2b^2c^2}{b^2c^2\cos^2p+a^2c^2\operatorname{sen}^2p\cos^2q+a^2b^2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2q}.$$

Introducendoci le coordinate X, Y, Z, come si è fatto in tutte le precedenti applicazioni si ottiene l'equazione

$$(X^2+Y^2+Z^2)(b^2c^2X^2+a^2c^2Y^2+a^2b^2Z^2)=k^2a^2b^2c^2$$

la quale appartiene ad una nuova superficie di quart'ordine. Che se si prendesse per $r$ un semidiametro della superficie di elasticità, la sua equazion polare porge

$$r^2=a^2\cos^2p+b^2\operatorname{sen}^2p\cos^2q+c^2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2q=\frac{R^4}{k^2}$$

quindi introdotte le coordinate ortogonali X, Y, Z invece delle polari verrà per la nuova superficie derivata da quella di elasticità, l'equazione

$$(X^2+Y^2+Z^2)^3=k^2(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)$$

la quale monta al sest'ordine. Tralascio ora ulteriori sviluppi su questo soggetto tanto per le linee, quanto per le superficie, e terminerò col notare, che in indagini somiglianti sulle stesse linee piane si potrebbe avere una rappresentazione geometrica di quegli integrali nei quali il coefficiente, o divisore di $d\varphi$ sia o una radice cubica, o una radice quarta del binomio, $1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi$, integrali, che da Legendre sono stati ridotti alle funzioni ellittiche.

Roma 21 Dicembre 1859.

# EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M$^r$. MICHAEL ROBERTS à M$^r$. TORTOLINI

## SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

COLLÈGE DE LA TRINITÉ

Dublin, le 30 Decembre 1859.

Je dois vous remercier de votre bienviellance en m'envoyant des exemplaires de vos mémoires sur les équations cubiques, et biquadratiques, que j'ai lu avec beaucoup de plaisir. Je suis bien aise, que les recherches recentes des géomètres ont ramené l'attention de mathématiciens sur les solutions algébriques de ces équations; qui, a ce que je pense ont été jusqu'ici trop négligées. Pour exemple je prendrai la liberté de vous faire part de la méthode suivant d'arriver à l'équation au carré des différences des racines d'une équation biquadratique qu'on peut introduire avantageusement, si je ne me trompe dans les ouvrages élémentaires sur l'algébre. Prenons pour notre équation

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0 \quad (\text{racines } x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

et posons

$$a^2\varpi=b^2-ac,\quad 12a^2\mu=ae-4bd+3c^2,\quad 8a^3\lambda=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3$$

et désignons par $\omega$ una racine cubique imaginaire de l'unité, alors

$$(l=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\mu^3},\qquad l=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\mu^3}).$$

$$x_1=-\frac{b}{a}+\sqrt{\varpi+l^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{\varpi+\omega l^{\frac{1}{3}}+\omega^2m^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{\varpi+\omega^2l^{\frac{1}{3}}+\varpi m^{\frac{1}{3}}}$$

$$x_2=-\frac{b}{a}+\sqrt{\varpi+l^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}}-\sqrt{\varpi+\omega l^{\frac{1}{3}}+\omega^2m^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{\varpi+\omega^2l^{\frac{1}{3}}+\omega m^{\frac{1}{3}}}$$

en sorte que si $(x_1-x_2)^2=t$ nous tirons

$$\frac{t}{4}=\left(\sqrt{\varpi+\omega l^{\frac{1}{3}}+\omega^2m^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{\varpi+\omega^2l^{\frac{1}{3}}+\omega m^{\frac{1}{3}}}\right)^2$$

ce qui donne

$$\left(\frac{t}{4} - 2\varpi + l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4\left\{\varpi^2 - \varpi\left(l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}}\right) + l^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}} - \mu\right\}$$

ou

$$\frac{t^2}{16} - \varpi t + 6\mu = 3\left(l^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{t}{2}\left(l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}}\right)$$

mais on a

$$l^{\frac{2}{3}} = \frac{l}{\mu} m^{\frac{1}{3}}, \qquad m^{\frac{2}{3}} = \frac{m}{\mu} l^{\frac{1}{3}}$$

en sorte, que nous avons

$$\frac{t^2}{16} - \varpi t + 6\mu = \left(\frac{3m}{\mu} - \frac{t}{2}\right) l^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3l}{\mu} - \frac{t}{2}\right) m^{\frac{1}{3}}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{t^2}{16} - \varpi t + 6\mu\right)^3 = \left(\frac{3m}{\mu} - \frac{t}{2}\right)^3 l + \left(\frac{3l}{\mu} - \frac{t}{2}\right)^3 m$$

$$+ 3\mu\left(\frac{3m}{\mu} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{3l}{\mu} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t^2}{16} - \varpi t + 6\mu\right)$$

d'ou l'on trouve

$$t^6 - 48\varpi t^5 + 96(\mu + 8\varpi^2)t^4 - 256(16\varpi^3 + 24\mu\varpi + 13\lambda)t^3$$

$$+ 2304(32\varpi^2\mu + 16\varpi\lambda - 7\mu^2)t^2 - 331776\mu(\mu\varpi + \lambda)t$$

$$+ 442368(\mu^3 - \lambda^2) = 0$$

résultat que j'ai donné dans le Journal de Mr. Terquem (*) sans entrer dans le détails.

En général si une équation a deux racines doubles, les deux derniers termes de l'équation aux carréz des differences s'evanouissent; et aussi les deux conditions nécessaires pour l'existence d'une racine triple annullent les trois derniers termes de la même équation. Il suit de là d'apres l'équation que je viens de donner, que les conditions qu'une équation biquadratique a deux racines doubles sont

$$\mu = \varpi^2, \qquad \lambda = -\varpi^3$$

et si l'équation a une racine triple il faut qu'on a $\mu = \lambda = 0$, ce qui s'accorde avec les résultats déjà connus. Je trouve aussi pour une équation du degré $n$ avec

(*) Ann. de Mathém. 1857, pag. 369. Per un errore di stampa nei termini di $t^5$, e $t^4$, si legge ivi $4\delta\varpi$, $\delta\varpi^2$ invece di $48\varpi$, $8\varpi^2$. B. T.

*

des coefficients binómes la formule

$$12a^4 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = n^3(n-1)^2(n-2)\left[ n(b^2 - ac)(ae - 4bd + 3c^2) \right.$$
$$\left. + 2(n-2)a(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) \right]$$

d'où nous tirons pour $n = 4$

$$\mu\varpi + \lambda = \frac{1}{4508} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

en sorte que le coefficient de l'avant-dernier terme de l'équation au carré des différences des racines d'une équation biquadratique peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{6}{a^2}(ae - 4bd + 3c^2) \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_3 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

une forme je pense assez élégante quand on se rappelle, que le dernier terme est representé par le determinant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}$$



# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

## SULLA RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI ISOPERIMETRICHE ALLA FORMA CANONICA.

RICHELOT. — Sur les équations différentielles du calcul des variations. Extrait d'une lettre à Mr. Hermite. *Comptes Rendus.* 31 Octobre 1859.

È noto che mediante le trasformazioni delle equazioni della Dinamica dovute a Lagrange, ad Hamilton, a Jacobi la soluzione dei problemi della Dinamica è ridotta alla integrazione di un numero doppio di equazioni differenziali, ma del primo ordine e di una forma particolare denominata *forma canonica;* od alla integrazione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare. La dinamica teoretica deve molti dei suoi recenti progressi a quelle trasformazioni (Vedasi il diligentissimo rapporto del Sig. Cayley – On the Recent Progress of Theoretical Dynamics - Report of the 27th Meeting of the British Association – 1858). Le equazioni della Dinamica potendo considerarsi come un caso particolare delle equazioni isoperimetriche offrivasi spontanea la ricerca di analoghe trasformazioni per queste ultime equazioni. Il Sig. Ostrogradsky in una lunga memoria, poco conosciuta, « Sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres - Memoires de l'Académie de Saint-Petersbourg - Te. 6me. 1850 » occupatosi pel primo di questa importante quistione giunse a porre quelle equazioni sotto la forma canonica (pag. 403) ed a ridurre la integrazione delle medesime a quella di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare (pag. 445). In una nota pubblicata negli Atti della Società Italiana (1854) « Sui criterj di integrabilità delle funzioni e sulle equazioni isoperimetriche » ho dimostrato come la riduzione delle equazioni isoperimetriche alla forma canonica si possa ottenere molto semplicemente mediante una effettiva trasformazione di quelle equazioni. Crediamo opportuno di ripubblicare in questi *Annali* quella dimostrazione con alcune variazioni, giacchè i risultati comunicati dal Sig. Richelot al Sig. Hermite nella lettera citata coincidono con quelli dell'Ostrogradsky.

Indicando con $t$ la variabile principale, con $x_1$, $x_2 \ldots x_m$ $m$ funzioni delle medesime e con V una funzione di $t$, di $x_1$, $x_2 \ldots x_m$ e delle loro derivate rispetto a $t$, $x'_1$, $x''_1 \ldots x_1^{(\alpha_1)}$; $x'_2$, $x''_2 \ldots x_2^{(\alpha_2)}$; $\ldots x'_m$, $x''_m \ldots x_m^{(\alpha_m)}$; è noto che le equazioni isoperimetriche quali vengono date dal calcolo delle variazioni hanno

la forma:

$$(1) \qquad \frac{dV}{dx_r} - \left(\frac{dV}{dx'_r}\right)' + \left(\frac{dV}{dx''_r}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n)} = 0$$

nella quale si è fatto per brevità $\alpha_r = n$. Posto:

$$\varphi_{r,s} = \frac{dV}{dx_r^{(s+1)}} - \left(\frac{dV}{dx_r^{(s+2)}}\right)' + \ldots + (-1)^{n-s-1} \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n-s-1)}$$

si ha evidentemente il gruppo di equazioni:

$$(2) \quad \varphi_{r,n-1} = \frac{dV}{dx_r^{(n)}}; \quad \varphi'_{r,n-1} + \varphi_{r,n-2} = \frac{dV}{dx_r^{(n-1)}}; \quad \varphi'_{r,n-2} + \varphi_{r,n-3} = \frac{dV}{dx_r^{(n-2)}}$$

$$\ldots \ldots \varphi'_{r,0} = \frac{dV}{dx_r}.$$

Se si moltiplicano ordinatamente queste equazioni per $x_r^{(n+1)}$, $x_r^{)n)}$, $\ldots\ldots x'_r$, e si sommano le equazioni risultanti si ottiene la

$$\sum_1^m {}_r \left\{ \varphi_{r,n-1}\, x_r^{(n)} + \varphi_{r,r-2}\, x_r^{(n-1)} + \ldots + \varphi_{r,0}\, x'_r \right\}' = V' - \frac{dV}{dt},$$

od indicando con T il primo membro di questa equazione:

$$V' - T' = \frac{dV}{dt}.$$

Notisi che la equazione (1) essendo alle derivate dell' 2nesimo ordine conterrà in generale le:

$$x_r\,,\ x'_r\,,\ x''_r \ldots x_r^{(2n-1)}\ ;$$

sostituiamo alle $n$ quantità:

$$x_r^{(n)},\ x_r^{(n+1)} \ldots x_r^{(2n-1)}$$

le:

$$\varphi_{r,n-1}\,,\ \varphi_{r,n-2} \cdots \varphi_{r,0}$$

cioè si considerino le $2n$ quantità:

$$x_r\,,\ x'_r\,,\ ,\ldots x_r^{(n-1)}\ ; \quad \varphi_{r,0}\,,\ \varphi_{r,1} \cdots \varphi_{r,n-1}$$

come variabili indipendenti.

Se nella espressione T — V si sostituiscono alle $x_r^{(n)}$ i loro valori dati dalle relazioni $\varphi_{r,n-1} = \frac{dV}{dx_r^{(n)}}$ ed indicasi con:

$$\theta(s, \ldots\ldots x_r\,,\ x'_r\,, \ldots x_r^{(n-1)}\,,\ \varphi_{r,0}\,,\ \varphi_{r,1} \cdots \varphi_{r,n-1}\,, \ldots\ldots)$$

la funzione risultante; si avranno facilmente le equazioni:

$$\frac{d\theta}{d\varphi_{r,0}} = x'_r\,, \quad \frac{d\theta}{d\varphi_{r,1}} = x''_r \ldots . \frac{d\theta}{\varphi_{r,n-1}} = x_r^{(n)}$$

$$\frac{d\theta}{dx_r} = -\frac{dV}{dx_r}\,, \quad \frac{d\theta}{dx'_r} = -\frac{dV}{dx'_r} + \varphi_{r,0}\,, \ldots . \frac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}} = -\frac{dV}{dx_r^{(n-1)}} + \varphi_{r,n-2}$$

ossia per le equazioni (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} = \dfrac{d\theta}{d\varphi_{r,0}}\,, \quad \dfrac{dx'_r}{dt} = \dfrac{d\theta}{d\varphi_{r,1}} \ldots . \dfrac{dx_r^{(n-1)}}{dt} = \dfrac{d\theta}{d\varphi_{r,n-1}} \\ \dfrac{d\varphi_{r,0}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dx_r}\,, \quad \dfrac{d\varphi_{r,1}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dx'_r} \ldots . \dfrac{d\varphi_{r,n-1}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}} \end{cases}$$

le quali equazioni in numero $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)$ hanno la forma canonica. Si potranno quindi estendere ad esse le molte proprietà che hanno luogo per le equazioni della Dinamica poste sotto la forma canonica. Fra esse notiamo quella che fa dipendere la integrazione delle equazioni isoperimetriche dall'integrazione di una equazione a derivate parziali (*). Indicando con S una funzione di:

$$t\,,\ x'_1\,,\ x''_1\,, \ldots x_r^{(\alpha_1-1)}\,;\ x_2\,,\ x'_2 \ldots x_2^{(\alpha_2-1)} \ldots . x_m\,,\ x'_m \ldots x_m^{(\alpha_m-1)}$$

ponendo:

$$(4) \qquad \varphi_{r,s} = \frac{dS}{dx_r^{(s)}}$$

e sostituendo queste espressioni nella funzione $\theta$, si troverà come pel caso delle equazioni dinamiche che la equazione suddetta a derivate parziali è la seguente:

$$\frac{dS}{dt} + \theta\left(t, \ldots x_r\,,\ x'_r \ldots x_r^{(n-1)}\,;\ \frac{dS}{dx_r}\,, \frac{dS}{dx'_r} \cdots \frac{dS}{dx_r^{(n-1)}}\,, \cdots\right) = 0\,.$$

Denominando S una soluzione completa di questa equazione, cioè una soluzione la quale contenga $\alpha_1 + \alpha_2 + .:. + \alpha_m$ costanti arbitrarie $a_{r,0}\,,\ a_{r,1} \ldots . a_{r,n-1}$; le equazioni:

$$\frac{dS}{da_{r,s}} = b_{r,s}$$

unitamente alle (4) sono gli integrali delle equazioni isoperimetriche.

Pavia, Dicembre 1859.

PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

(*) Il Sig. Clebsch ha dato una dimostrazione di questa proprietà nella Memoria « Ueber diejenigen Probleme der Variations rechnung etc. » Giornale di Crelle T.° 55 An. 1858, e recentemente (Giornale di Crelle, T.° 57) nella Memoria « Uber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. » ha mostrato con varj esempj come la soluzione dei problemi isoperimetrici possa ottenersi facilmente mediante l'integrazione dell'equazione a derivate parziali.

## A TREATISE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

**GEORGE BOOLE, F. R. S.**

Cambridge 1859, vol. in 8. pag. I-XV. 1-485.

Questa nuova, ed interessante opera testè pubblicata dal Sig. *G. Boole* è divisa in diciotto capitoli, dei quali la maggior parte viene impiegata per l' integrazione delle così dette *Equazioni differenziali*, ed il rimanente per l'Equazioni a derivate parziali. Alla fine di ogni capitolo poi si propongono degli esempi a sviluppo delle teorie. Quanto possa essere rilevante quest'opera nello stato attuale della scienza lo indica il titolo, ed il nome dell'illustre geometra d'Irlanda. Non essendo mio scopo in questa breve notizia, e quasi puramente bibliografica di venire all'esame, ed alla discussione dei metodi usati dal Sig. *Boole* mi basterà notare, che esso mette giudiziosamente a profitto, quanto di più importante su quest'argomento è stato scritto da *Eulero, Lagrange, Laplace, Legendre, Cauchy, Jacobi, Hamilton*, e dall'autore medesimo nelle transazioni filosofiche di Londra. In questa circostanza mi piacerà anche rammentare le dotte Memorie degli illustri geometri italiani *Paoli, Brunacci, Malfatti*, pubblicate già da molti anni a questa parte. Nei capitoli XVI e XVII viene sviluppato dal Sig. *Boole* l'uso dei simboli per l'integrazione dell'equazioni. L'autore espone con un bel ordine e chiarezza le varie formole simboliche, e richiama in special modo un suo lavoro fin dal 1844, e differenti pubblicazioni di altri distinti geometri inglesi. Certamente l'uso dei simboli, e delle caratteristiche messo in opera con quelle cautele, e precauzioni che si richiedono è di una mirabile risorsa nella risoluzione di un gran numero di problemi di analisi, e di Calcolo Integrale. Io citerò le belle ed eleganti Memorie del Sig. *Cauchy* per l'integrazione dell'Equazioni lineari, argomento che anche io per mezzo del Calcolo dei Residui, e coll'uso dei simboli, e delle caratteristiche diffusamente trattai fin dal 1842, e 1843 in una serie di Memorie pubblicate nel Giornale Arcadico di Roma, e più recentemente nel 1854 in una mia Memoria nel tom. 25 della Società Italiana. Infine nell'ultimo capitolo il Sig. *Boole* succintamente espone la soluzione dell'equazioni lineari per mezzo degli Integrali definiti: i metodi sono quei di *Laplace, Fourier, Poisson, Cauchy*, ed io pure con qualche estensione mi proposi lo stesso soggetto nelle citate Memorie del 1842, 1843. Utilissima riuscirà la lettura dell'opera del Sig. *Boole* tanto ai Professori quanto agli allievi, e per una maggior diffusione sarebbe da augurarsi una buona traduzione in una lingua più diffusamente conosciuta. Terminerò questa breve notizia con dire, che essa potrà anche servir di guida ad altri geometri, che sopra l'equazioni differenziali si proponessero il più grande sviluppo. B. T.

# FONDAMENTI DI UNA TEORICA GENERALE DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA.

DI B. RIEMANN.

(Traduzione dal tedesco di una Dissertazione inaugurale pubblicata a Göttingen nel 1851).

(Continuazione V. pag. 288.)

## 11.

Colle supposizioni relative ad $u$ e a T fatte alla fine dell'articolo precedente, abbiamo i seguenti teoremi:

I. Se lungo una linea è $u = 0$ e $\frac{du}{dp} = 0$, $u$ sarà per tutto $= 0$.

Dimostreremo prima che una linea $\lambda$ dove $u = 0$ e $\frac{du}{dp} = 0$, non può formare il contorno di una parte di superficie $a$, dove $u$ è positiva.

Supposto che ciò fosse possibile si prenda un pezzo della superficie $a$, che abbia per contorno una parte di $\lambda$ e una parte di circonferenza, e che non contenga il centro di questa, il che è sempre possibile. Allora, indicando con $r$ e $\varphi$ le coordinate polari di un punto O riferite ad un punto $O_0$ come a polo, abbiamo:

$$\int \log r \frac{du}{dp} ds - \int u \frac{d \log r}{dp} ds = 0,$$

estendendo gl'integrali all' intero contorno di questo pezzo; quindi, per la supposizione fatta, sarà nulla anche la somma di questi integrali estesi al solo arco di circolo, cioè

$$\int u \, d\varphi + \log r \int \frac{du}{dp} ds = 0;$$

e poichè $\int \frac{du}{dp} ds = 0$, sarà $\int u \, d\varphi = 0$, ciò che contradice alla supposizione che $u$ sia sempre positivo nell'interno di $a$.

In simil modo si dimostrerà che l'equazioni $u = 0$, $\frac{du}{dp} = 0$ non possono verificarsi in una parte di contorno di un area $b$ dove $u$ è negativo.

Ora se nella superficie T in una linea fosse $u = 0$ e $\frac{du}{dp} = 0$, e in una parte della

stessa fosse $u$ differente da zero, questa parte di superficie o dovrebbe esser limitata da questa linea stessa, o da una parte di superficie dove $u$ fosse zero, e quindi sempre dovrebbe aver per contorno una linea dove fossero $u$ e $\frac{du}{dp} = 0$, il che contradice a ciò che abbiamo dimostrato.

II. Se il valore di $u$ e di $\frac{du}{dp}$ è dato lungo una linea, $u$ rimane determinato in tutte le parti di T.

Siano $u_1$ e $u_2$ due funzioni date che sodisfano alle condizioni poste per $u$, queste saranno sodisfatte anche dalla loro differenza $u_1 - u_2$ come risulta, sostituendo la medesima nell'equazioni relative. Ora se $u_1$ e $u_2$ e le loro derivate prime coincidessero lungo una linea, e non coincidessero in un altra parte di superficie, lungo questa linea sarebbe

$$u_1 - u_2 = 0\,, \qquad \frac{d(u_1 - u_2)}{dp} = 0$$

senza che fosse per tutta la superficie $u_1 - u_2 = 0$, contro il teorema I.

III. I punti di T, nei quali $u$ è costante, formano necessariamente, quando $u$ non è per tutto costante, linee, che separano una parte di superficie dove $u$ è maggiore da un altra dove $u$ è minore.

Questo teorema è composto dei seguenti:

$u$ non può in un punto di T avere un minimo o un massimo;

$u$ non può esser costante *soltanto* in una parte della superficie;

le linee nelle quali $u = 0$ non possono limitare da ambedue le parti aree nelle quali $u - a$ ha lo stesso segno;

Teoremi, l'opposto dei quali, come è facile a vedersi, trascinerebbe sempre una negazione dell'equazioni dimostrate nel paragrafo precedente:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\varphi\,, \quad \text{o} \quad \int_0^{2\pi} (u - u_0)\, d\varphi = 0,$$

e che quindi sono impossibili.

## 12.

Torniamo ora a considerare una variabile complessa $w = u + vi$, la quale in generale (cioè senza escludere un eccezione in linee e punti singolari) ha per ogni punto O della superficie T un valore determinato colla posizione di O, e che varia in modo da sodisfare all'equazioni:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx},$$

e come già abbiamo stabilito, diciamo che una variabile $u$, la quale gode queste proprietà, è una funzione di $z = x + iy$. Per semplicità in seguito supporremo che una funzione di $z$ non debba possedere discontinuità che possano togliersi per la mutazione del suo valore in un punto separato.

Prendiamo prima la superficie T semplicemente connessa, e per tutto semplicemente distesa sopra A.

*Teorema*. Se una funzione $w$ di $z$ non ha mai interruzioni di continuità lungo una linea, e per un punto qualunque O' della superficie in cui sia $z = z'$, $w(z - z')$ diviene infinitamente piccolo quando O si avvicina indefinitamente ad O', essa e tutte le sue derivate in tutti i punti della superficie sono finite e continue.

Le supposizioni fatte relativamente alle variazioni di $w$, ponendo $z - z' = \rho e^{i\varphi}$, divengono relativamente ad $u$ e a $v$ le seguenti:

1. $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0$ per ogni parte della superficie T;

2. $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$ per ogni parte della superficie T;

3. Le funzioni $u$ e $v$ non sono discontinue lungo una linea;

4. Per ogni punto O', $\rho u$ e $\rho v$ divengono infinitamente piccoli quando diviene infinitamente piccola la distanza $\rho$ di O da O';

5. Per le funzioni $u$ e $v$ sono escluse le discontinuità che possono togliersi mutando il loro valore in punti separati.

In conseguenza delle supposizioni 2, 3, 4, per l'art. 9, III, sarà per ogni parte della superficie T;

$$\int\left(u\frac{dx}{ds} - v\frac{dy}{ds}\right)ds = 0,$$

estendendo l'integrale a tutto il contorno di T; e quindi l'integrale

$$\int_{O_0}^{O}\left(u\frac{du}{ds} - v\frac{dy}{ds}\right)ds$$

esteso a una linea qualunque che va da $O_0$ ad O (per l'articolo 9, IV) prende sempre lo stesso valore, e riguardando $O_0$ come fisso, forma una funzione U di $x$ e di $y$ necessariamente continua per tutto fuorichè in punti separati, la quale (art. 9. V) ha in ogni punto per derivate parziali $\frac{dU}{dx} = u$, $\frac{dU}{dy} = -v$. Sostituendo questi valori per $u$ e $v$, le supposizioni 1, 3, 4 divengono le condizioni del teorema dato alla fine del paragrafo 10. Dunque la funzione U e tutte le sue derivate sono finite, e

*

continue in tutti i punti di T, e in conseguenza lo stesso varrà anche per la funzione complessa $w = \frac{dU}{dx} - i\frac{dU}{dy}$ e per tutte le sue derivate prese rapporto a $z$.

### 13.

Passiamo ora a determinare che cosa accade quando, ritenendo le altre supposizioni dell' articolo 12, ammettiamo che, per un dato punto $O'$ della superficie T, $(z - z')w = \rho e^{\varphi i} w$ non diviene più infinitamente piccolo per l'infinito avvicinarsi di O ad $O'$. In questo caso $w$ diviene infinito coll'infinito avvicinarsi di O ad $O'$, e supporremo, che se $u$ non è dello stesso ordine di $\frac{1}{\rho}$, cioè se il quoziente di ambedue queste quantità non ha per limite una grandezza finita, almeno gli ordini delle medesime stiano tra loro in un rapporto finito, in guisa che si possa trovare una potenza di $\rho$, per la quale moltiplicata $w$, al prodotto col decrescere infinito di $\rho$ converga verso un limite finito o verso zero. Se $\mu$ è l'esponente di questa potenza e $n$ il prossimo numero intero superiore la quantità $(z-z')^n w = \rho^n e^{n\varphi i} w$ diverrà infinitamente piccola con $\rho$, e quindi $(z-z')^{n-1} w$ sarà una funzione di $z$ $\left(\text{poichè } \frac{d(z - z')^{n-1} w}{dz}\right.$ è indipendente da $\left.dz\right)$ la quale in questa parte della superficie sodisferà alle supposizioni dell'articolo 12, e in conseguenza sarà finita e continua nel punto $O'$. Se indichiamo con $a_{n-1}$ il suo valore nel punto $O'$, $(z - z')^{n-1} w - a_{n-1}$ sarà una funzione che in questo punto è continua e eguale a zero, e in conseguenza diviene infinitamente piccola con $\rho$, onde per l'articolo 12, la espressione $(z - z')^{n-2} w - \frac{a_{n-1}}{z-z'}$ è una funzione continua nel punto $O'$. Continuando questo processo, $w$ per la sottrazione di una espressione della forma

$$\frac{a_1}{z - z'} + \frac{a_2}{(z - z')^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(z - z')^{n-1}}$$

diverrà evidentemente una funzione che resta finita e continua nel punto $O'$.

Dunque se le supposizioni dell' articolo 12 sono modificate soltanto in questo, che la funzione $w$ debba divenire infinita per l'infinito avvicinarsi del punto O a un punto $O'$ della superficie T, l'ordine di questo infinito (una quantità che cresce nel rapporto inverso della distanza si considera come un infinito di primo ordine) se è finito sarà necessariamente un numero intero; e se questo numero è $m$, la funzione $w$ aggiungendo ad essa una funzione che contiene $2m$ costanti arbitrarie, si trasforma in una funzione continua nel punto $O'$.

*Osservazione.* Consideriamo una funzione come contenente una sola costante arbitraria, se tutti i modi possibili di determinarla abbracciano una sola dimensione.

14.

Le limitazioni, che abbiamo fatte negli articoli 12 e 13 relativamente alle superficie T, non sono essenziali perchè sussistano i risultati ottenuti. Evidentemente ogni punto di una superficie qualunque può circondarsi con un pezzo della medesima che possieda la proprietà che abbiamo ivi supposta, eccettuato soltanto il caso, in cui questo punto fosse un punto di giramento della superficie.

Per istudiare questo caso, immaginiamoci la superficie T o un pezzo qualunque di essa, che contenga un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, dove sia $z=z'=x'+iy'$, riportata per mezzo della funzione $\zeta=(z-z')^{\frac{1}{n}}$ sopra un altro Piano Λ, cioè immaginiamo il valore della funzione $\zeta=\xi+i\eta$ nel punto O rappresentato da un punto Θ, che ha per coordinate ortogonali $\xi$ e $\eta$, e consideriamo il punto Θ come l'imagine del punto O. In questo modo si ottiene per rappresentazione di questa parte della superficie T una superficie connessa distesa sopra Λ, che non ha punto di giramento nel punto Θ' imagine del punto O', come passiamo a dimostrare.

Per fissar le idee imaginiamo descritta una circonferenza nel piano A col centro in O' e col raggio R, e condotto un diametro parallello all' asse delle $x$, lungo il quale $z-z'$ prenderà i valori reali. La porzione di superficie T compresa da questo circolo, che racchiude il punto di giramento, quando si prenda R sufficientemente piccolo, rimarrà spezzata da ambedue le parti del diametro in $n$ semicircoli separati uno dall'altro. Da quella parte del diametro, nella quale $y-y'$ è positivo, indichiamo questi semicircoli con $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, e dalla parte opposta con $a'_1$, $a'_2$ ... $a'_n$, e ammettiamo che per valori negativi di $z-z'$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ siano attaccati rispettivamente con $a'_1$, $a'_2$, ..: $a'_n$, e al contrario per valori positivi con $a'_n$, $a'_1$, ... $a'_{n-1}$, in guisa che un punto che giri intorno a O' (nel senso conveniente) trascorra successivamente le superficie $a_1$, $a'_1$, $a_2$, $a'_2$, ... $a_n$, $a'_n$ e da $a'_n$ torni di nuovo in $a_1$, la qual supposizione evidentemente può sempre farsi. Se introduciamo ora, per ambedue i piani, coordinate polari, ponendo $z-z'=\rho e^{\varphi i}$, $\zeta=\sigma e^{\psi i}$, e scegliamo per rappresentare il semicircolo $a_1$ quel valore di $(z-z')^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\varphi}{n}i}$ per cui $0\leqq\varphi\leqq\pi$, per tutti i punti di $a_1$ sarà $\sigma\leqq R^{\frac{1}{n}}$ e $0\leqq\psi\leqq\frac{\pi}{n}$, quindi le rappresentazioni degli stessi nel piano Λ saranno contenute in un settore di un circolo descritto intorno a Θ' col raggio $R^{\frac{1}{n}}$, che si estende da $\psi=0$ a $\psi=\frac{\pi}{n}$, e a ogni punto di $a_1$ corrisponde un punto di questo settore, che si muove con continuità insieme

con esso, e viceversa, onde segue che la imagine della superficie $a_1$ è una superficie semplicemente connessa distesa sopra questo settore. In simil modo si ottiene per imagine del semicircolo $a'_1$ un settore che si estende da $\psi = \frac{\pi}{n}$ a $\psi = \frac{2\pi}{n}$, per $a_2$ un settore che si estende da $\psi = \frac{2\pi}{n}$ a $\psi = \frac{3\pi}{n}$, finalmente per $a'_n$ un settore che si estende da $\psi = \frac{(2n-1)\pi}{n}$ a $\psi = 2\pi$, se per ogni punto di queste superficie prendiamo $\varphi$ successivamente compreso tra $\pi$ e $2\pi$, $2\pi$ e $3\pi$, .... $(2n-1)\pi$ e $2n\pi$, ciò che è sempre possibile e in un sol modo. Ma questi settori si attaccano l'uno all'altro nell' ordine stesso con cui si succedono i semicircoli $a_1$ e $a'$, in modo che a punti consecutivi corrispondono punti consecutivi, perciò formano insieme uniti una imagine di un pezzo della superficie T che racchiude il punto O′, e questa imagine è evidentemente una superficie connessa distesa semplicemente sopra il piano Λ.

Una variabile che per ogni punto O ha un determinato valore, lo ha anche per ogni punto Θ e viceversa, poichè ad ogni O corrisponde soltanto un Θ, e ad ogni Θ soltanto un O; quindi se è funzione di $z'$ è anche funzione di $\zeta$, poichè se $\frac{du}{dz}$ è indipendente da $dz$, anche $\frac{du}{d\zeta}$ è indipendente da $d\zeta$, e viceversa. Da ciò risulta che i teoremi degli articoli 12 e 13 possono essere applicati a tutte le funzioni $w$ di $z$ anche nei loro punti di giramento, purchè si considerino come funzioni di $(z-z')^{\frac{1}{n}}$; onde abbiamo il seguente teorema:

Se una funzione $w$ di $z$ diviene infinita coll' infinito avvicinarsi del punto O a un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine O′, questo infinito è necessariamente dello stesso ordine di una potenza della distanza il cui esponente è un multiplo di $\frac{1}{n}$, e se questo esponente è $-\frac{m}{n}$, aggiungendo alla medesima funzione una espressione della forma:

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}}+\frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}}$$

dove $a_1$, $a_2$ ... $a_m$ sono quantità complesse arbitrarie, si può trasformare in una funzione continua nel punto O′.

Come corollario di questo teorema si può dedurne, che la funzione $w$ è continua nel punto O′, se $(z-z')^{\frac{1}{n}}\,w$ diviene infinitamente piccolo quando O si avvicina infinitamente ad O′.

15.

Se imaginiamo ora una funzione di $z$, che abbia un valore determinato per ogni punto O della superficie T distesa comunque sopra A, e che non sia per tutto costante, rappresentata geometricamente, in modo che il suo valore $w=u+iv$ nel punto O venga rappresentato da un punto Q del piano B, che abbia per coordinate ortogonali $u$ e $v$, avremo il seguente teorema :

I. L'insieme dei punti Q formerà una superficie S, nella quale a ogni punto corrisponde un determinato punto O della superficie T, e facendo muovere con continuità Q sopra S, anche O si muoverà con continuità sopra T.

Per dimostrare questo teorema è evidente che basterà provare, che la posizione di Q varia sempre (e in generale con continuità) con quella di O. Questa prova è contenuta nel seguente teorema:

Una funzione $w = u + iv$ di $z$ non può esser costante lungo una linea, senza esser per tutto costante.

*Dimostrazione* : Se $w$ lungo una linea avesse un valore costante $a + ib$, si avrebbe in questa linea

$$u - a = 0 \ , \quad \frac{d(u - a)}{dp} = \frac{dv}{ds} = 0 \, ,$$

e per tutto

$$\frac{d^2(u - a)}{dx^2} + \frac{d^2(u - a)}{dy^2} = 0 \, ,$$

quindi per il teorema I dell'articolo 11, si avrebbe per tutto $u - a = 0$, e poichè $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy} = - \frac{dv}{dx}$, anche $v - b = 0$ per tutto, contro il supposto.

II. In conseguenza delle supposizioni fatte in I, tra le parti di S non può esservi connessione, senza che vi sia connessione delle parti corrispondenti di T; viceversa per tutto dove in T è connessione e $w$ è continua, corrisponde connessione S.

Ciò presupposto, corrisponde il contorno di S da una parte al contorno di T, dall'altra ai posti di discontinuità ; ma le sue parti interne, esclusi punti singolari, per tutto sono semplicemente distese sopra B, cioè in nessun luogo vi è intersezione di parti sovrapposte o piegature della superficie.

Affinchè si verificasse la prima ipotesi, poichè la connessione di T corrisponde per tutto a quella di S, sarebbe necessario che in T vi fosse un intersezione, contro il supposto. Dimostriamo ora che non può verificarsi la seconda.

Proviamo prima, che un punto Q', dove $\frac{dw}{dz}$ è finita, non può trovarsi in una piegatura di S.

Se racchiudiamo il punto O′, a cui corrisponde Q′, in una porzione di superficie T di forma qualunque e di dimensioni indeterminate, si devon potere (secondo l'articolo 3) prendere le dimensioni della stessa sempre così piccole, che la forma della porzione corrispondente di S ne differisca di tanto poco quanto si vuole, e in conseguenza così piccole che il contorno della stessa sul piano B separi una porzione che racchiuda Q′. Ma questo è impossibile se Q′ si trova in una piegatura della superficie S.

Ora $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ come funzione di $z$, per il teorema I, può essere eguale a zero soltanto in punti separati, e poichè è continua nei punti di T che si considerano, può divenire infinita soltanto nei punti di giramento; dunque ec. come volevamo dimostrare.

III. In conseguenza la superficie S è una superficie, per la quale valgono le supposizioni fatte per T nell'articolo 5; e in questa superficie per ogni punto Q la variabile $z$ ha un valore determinato, che varia con continuità colla posizione di Q, e in modo che $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$ è indipendente dalla direzione del moto di Q. Dunque $z$ è nel senso stabilito in principio una funzione continua della variabile complessa $w$ per il campo rappresentato dalla superficie S.

Da ciò segue inoltre:

Se O′ e Q′ sono due punti corrispondenti delle superficie T ed S, e nei medesimi è $z = z'$, $w = w'$, e se nessuno di essi è un punto di giramento, $\frac{w - w'}{z - z'}$ coll'avvicinarsi infinitamente di O ad O′ converge verso un limite finito, e le rappresentazioni dell'una per l'altra sono simili nelle parti infinitesime; ma se Q′ è un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, e O′ un punto di giramento di $(m-1)^{esimo}$ ordine, $\frac{(w - w')^{\frac{1}{n}}}{(z - z')^{\frac{1}{m}}}$ coll'avvicinarsi infinitamente di O ad O′ convergerà verso un limite finito, e per le parti di superficie prossime ad essi si ha un modo di rappresentazione quale risulta facilmente dall'articolo 14.

## 16.

*Teorema.* Se $\alpha$ e $\beta$ sono due funzioni qualunque di $x$ e di $y$, per le quali l'integrale:

$$\int\left[\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{dT}$$

esteso a tutte le parti della superficie T distesa comunque sopra A, ha un valore

finito, facendo variare $\alpha$ di funzioni continue o discontinue soltanto in punti separati, le quali sul contorno siano eguali a zero, l'integrale acquisterà sempre per una di queste funzioni un valore minimo, e uno soltanto, se si escludono le discontinuità che possono togliersi colla mutazione del loro valore in punti separati.

Indichiamo con $\lambda$ una funzione qualunque continua o discontinua soltanto in punti separati, che nel contorno è $= 0$, e per la quale l'integrale:

$$L = \int \left[ \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \right] dT$$

esteso a tutta la superficie ha un valore finito, con $\omega$ una qualunque delle funzioni $\alpha + \lambda$, finalmente con $\Omega$ l'integrale

$$\int \left[ \left(\frac{d\omega}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)^2 \right] dT$$

esteso a tutta la superficie. L' insieme delle funzioni $\lambda$ forma un campo continuo e chiuso, poichè ciascuna di queste funzioni si converte con continuità in ciascuna delle altre, ma non si può avvicinare infinitamente a una funzione discontinua lungo una linea senza che L divenga infinito (Art. 17); ora, posto $\omega = \alpha + \lambda$, $\Omega$ prende per ogni funzione $\lambda$ un valore finito, che diviene infinito con L, varia con continuità colle forme di $\lambda$, ma non può abbassarsi al di sotto di zero; dunque $\Omega$ ha almeno un minimo per una forma della funzione $\omega$.

Per dimostrare la seconda parte del nostro teorema, sia $u$ una delle funzioni $\omega$, che fa acquistare ad $\Omega$ un valore minimo, $h$ una indeterminata costante in tutta la superficie, in guisa che $u + h\lambda$ sodisfi a tutte le condizioni alle quali abbiamo assoggettato la funzione $\omega$. Il valore di $\Omega$ che, per $\omega = u + h\lambda$, diviene

$$+ \int \left[ \left(\frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)^2 \right] dT$$
$$+ 2h \int \left[ \left(\frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)\frac{d\lambda}{dx} + \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{d\lambda}{dy} \right] dT$$
$$+ h^2 \int \left[ \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \right] dT = M + 2Nh + Lh^2 ,$$

deve per ogni $\lambda$ (dietro il concetto del minimo) divenire maggiore di M, quando si prenda $h$ sufficientemente piccolo. Ma questo esige, che per ogni forma di $\lambda$, sia $N = 0$; poichè altrimenti

$$2Nh + Lh^2 = Lh^2\left(1 + \frac{2N}{Lh}\right)$$

diverrebbe negativo prendendo $h$ di segno opposto a $\frac{2N}{L}$ e minore di questa quantità astrazion fatta dal segno. Il valore di $\Omega$ per $\omega = u + \lambda$, nella qual forma evidentemente sono compresi tutti i possibili valori di $\omega$, diviene perciò eguale ad $M+L$, e quindi essendo $L$ essenzialmente positivo, $\Omega$ non può avere per alcun altra forma di $\omega$ un valore minore di quello che ha per $\omega = u$.

Se per un altra $u'$ delle funzioni $\omega$, $\Omega$ avesse un valore minimo $M'$, si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento, e avremmo $M' \overline{\gtrless} M$, e $M \overline{\gtrless} M'$, onde $M = M'$. Ma se poniamo $u'$ sotto la forma $u + \lambda'$, per $M'$ avremo l'espressione $M + L'$, indicando con $L'$ il valore di $L$ per $\lambda = \lambda'$, e l'equazione $M = M'$ darebbe $L' = 0$. Ora questo è possibile solamente quando per tutta la superficie siano $\frac{d\lambda'}{dx} = 0$, $\frac{d\lambda'}{dy} = 0$, e perciò finchè $\lambda'$ è continua, questa funzione ha necessariamente un valore costante, e quindi poichè essa nel contorno è eguale a zero e non è discontinua lungo una linea, questo valore potrà differire da zero al più in qualche punto separato. Dunque due funzioni $\omega$, che fanno acquistare ad $\Omega$ un valore minimo, non possono differire tra loro altro che in punti separati, e se nella funzione $u$ vengono poste da parte le discontinuità che possono togliersi mutandole il valore in punti separati, essa sarà completamente determinata.

## 17.

Ora bisogna dimostrare, che rimanendo finita $L$, la funzione $\lambda$ non può avvicinarsi infinitamente a una funzione $\gamma$ discontinua lungo una linea, cioè se $\lambda$ è assoggettata alla condizione di coincidere con $\gamma$ al di fuori di una parte di superficie $T'$ che racchiude la linea di discontinuità, $T'$ potrà prendersi così piccola che $L$ divenga maggiore di una quantità qualunque data $C$.

Dando il solito significato ad $s$ e a $p$ relativamente alla linea di discontinuità, indichiamo con $k$ la curvatura corrispondente a un valore qualunque di $s$, considerandola positiva, dalla parte convessa delle $p$ positive, e con $p_1$ il valore di $p$ nel contorno di $T'$ dalla parte positiva, e con $p_2$ quello dalla parte negativa, con $\gamma_1$ e $\gamma_2$ i valori corrispondenti di $\gamma$. Se consideriamo ora una parte qualunque di questa linea a curvatura continua, la parte di $T'$ compresa tra le normali ai punti estremi, se non si estende fino ai centri di curvatura, dà per la relativa parte del valore di L:

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp\,(1 - kp) \left\{ \left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 \frac{1}{(1-kp)^2} \right\},$$

ma il minimo valore dell'espressione

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 (1 - kp)dp$$

per i valori limiti fissi $\gamma_1$ e $\gamma_2$ di $\lambda$ si trova colle regole note eguale a

$$\frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 k}{\log(1 - kp_2) - \log(1 - kp_1)},$$

e quindi questa parte dell'integrale, comunque sia preso $\lambda$ dentro $T'$, diviene necessariamente maggiore di

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 k \, ds}{\log(1 - kp_2) - \log(1 - kp_1)}.$$

La funzione $\gamma$ sarebbe continua per $p = 0$, se il maggior valore che può prendere $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ per $\pi_1 > p_1 > 0$ e $\pi_2 > p_2 > 0$, divenisse infinitamente piccolo con $\pi_1 - \pi_2$; quindi per ogni valore di $s$, potremo prendere una quantità finita $m$ in guisa, che per quanto piccolo si prenda $\pi_1 - \pi_2$, continuamente siano compresi valori di $p_1$ e $p_2$ tra i limiti espressi da

$$\pi_1 > p_1 \geqq 0, \qquad \pi_2 > p_2 \leqq 0$$

(dove i segni di eguaglianza si escludono scambievolmente), per i quali $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ divenga maggiore di $m$. Se ammettiamo quindi colle limitazioni stabilite una forma qualunque per $T'$, dando a $p_1$ e a $p_2$ determinati valori $P_1$ e $P_2$; e indichiamo con $a$ il valore dell'integrale

$$\int \frac{mk \, ds}{\log(1 - kP_2) - \log(1 - kP_1)}$$

esteso alla parte che si considera della linea di discontinuità; potremo evidentemente fare

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 k \, ds}{\log(1 - kp_2) - \log(1 - kp_1)} > C,$$

prendendo $p_1$ e $p_2$ per ogni valore di $s$ in modo che siano sodisfatte le diseguaglianze

$$p_1 < \frac{1 - (1 - kP_1)^{\frac{a}{C}}}{k}, \qquad p_2 > \frac{1 - (1 - kP_2)^{\frac{a}{C}}}{k}, \qquad (\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m.$$

Ma segue da ciò che, comunque si prenda $L$ in $T'$, la parte di $L$ che si riferisce al pezzo di $T'$ preso in esame, e in conseguenza anche $L$ stessa sarà maggiore di $C$, come volevamo dimostrare.

18.

Secondo l'articolo 16, per la funzione $u$ ivi considerata, e per una qualunque delle funzioni $\lambda$, abbiamo

$$N = \int \left\{ \left( \frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy} \right) \frac{d\lambda}{dx} + \left( \frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) \frac{d\lambda}{dy} \right\} dT = 0,$$

quando si estenda l'integrale a tutta la superficie T. Da questa equazione dobbiamo ora dedurre altre conseguenze.

Se separiamo dalla superficie T una porzione T' che racchiuda i posti di discontinuità di $u$, $\beta$, $\lambda$, si trova la parte di N relativa all'altra porzione di superficie T'', per mezzo dell'articolo 7, ponendo $\left( \frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy} \right) \lambda$ in luogo di X, e $\left( \frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) \lambda$ in luogo di Y, essere eguale a

$$-\int \lambda \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} \right) dT - \int \left( \frac{du}{dp} - \frac{d\beta}{ds} \right) \lambda\, ds.$$

Per la condizione relativa al contorno alla quale abbiamo assoggettato la funzione $\lambda$, la parte dell'integrale

$$\int \left( \frac{du}{dp} - \frac{d\beta}{ds} \right) \lambda\, ds,$$

che si riferisce alla porzione di contorno di T'' comune a T, si annullerà; in guisa che potrà riguardarsi come composta dell'integrale:

$$-\int \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} \right) \lambda\, dT$$

esteso a T'', e dalla somma dei due integrali:

$$\int \left\{ \left( \frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy} \right) \frac{d\lambda}{dx} + \left( \frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) \frac{d\lambda}{dy} \right\} dT + \int \left( \frac{du}{dp} - \frac{d\beta}{ds} \right) \lambda\, ds,$$

estesi alla sola porzione T'.

Ora se $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}$ fosse differente da zero in una parte qualunque della superficie T, N prenderebbe evidentemente un valore differente da zero, tosto che $\lambda$ si prendesse, il che può farsi, eguale a zero in T', e in T'' tale che $\lambda \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} \right)$ avesse per tutto lo stesso segno. Ma se $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}$ è nullo per tutto, sparisce la parte di N relativa a T'' per ogni $\lambda$, e la condizione $N = 0$ risulta allora dall'annullarsi le parti relative alle porzioni di superficie che racchiudono le discontinuità.

Per le funzioni $\frac{du}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$ e $\frac{du}{dy} + \frac{d\beta}{dx}$ abbiamo perciò, indicando con X la prima

e con Y la seconda, non solamente in generale l'equazione:

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}=0;$$

ma anche

$$\int\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds=0.$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di una parte qualunque di T, e quindi questa espressione in generale ha un valore determinato.

Se dunque riduciamo (secondo l'articolo 9, V) la superficie T, quando essa è moltiplicemente connessa, per mezzo di trasversali in una $T^*$ semplicemente connessa, l'integrale

$$\int_{O_0}^{O}\left(\frac{du}{dp}-\frac{d\beta}{ds}\right)ds$$

ha lo stesso valore per ogni linea che sopra $T^*$ va da $O_0$ ad O, e riguardando $O_0$ come fisso, forma una funzione di $x$ e di $y$; che in $T^*$ è per tutto continua e lungo una trasversale offre la stessa variazione da ambedue le parti. Questa funzione $\nu$ aggiunta a $\beta$ ci dà una funzione $v=\beta+\nu$ le cui derivate parziali sono

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}, \qquad \frac{dv}{dy}=\frac{du}{dx}.$$

Quindi abbiamo il seguente

*Teorema*. Se è data in una superficie connessa T, ridotta per mezzo di trasversali in una semplicemente connessa $T^*$, una funzione complessa $\alpha+i\beta$ di $x$ e $y$, per la quale

$$\int\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right\}dT$$

esteso a tutta la superficie abbia un valore finito, si potrà sempre, e in un sol modo convertire in una funzione di $z$, aggiungendole una funzione $\mu+\nu i$ di $x$ e $y$ assoggettata alle seguenti condizioni:

1) $\mu$ è nel contorno $=0$, o soltanto differente da zero in punti separati, $\nu$ è dato in un punto qualunque;

2) le variazioni di $\mu$ in T, quelle di $\nu$ in $T^*$ sono soltanto discontinue in punti separati, e soltanto in modo che restino finiti gl'integrali

$$\int\left\{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2\right\}dT, \qquad \int\left\{\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2\right\}dT$$

estesi a tutta la superficie, e l'ultimo eguale da ambedue le parti lungo le trasversali.

La compatibilità delle condizioni che determinano $\mu + \nu i$ segue da ciò, che $\mu$, per cui riman determinato $\nu$ sino a una costante da aggiungersi, dà sempre un minimo dell' integrale $\Omega$, poichè posto $u = \alpha + \mu$, evidentemente si ha $N = 0$ per ogni $\lambda$; proprietà che secondo l'articolo 16 appartiene soltanto a una funzione.

## 19.

I principj che costituiscono il fondamento del teorema alla fine del paragrafo precedente, aprono la via a studiare *determinate* funzioni di una variabile complessa (indipendentemente da una espressione delle medesime).

Per orientarsi sopra questo terreno servirà il percorrere il complesso delle condizioni che si richiedono per determinare una tal funzione in una data estensione.

Se prima ci teniamo in un caso particolare, in cui la superficie distesa sopra A, nella quale il campo delle funzioni è rappresentato, è semplicemente connessa, la funzione $w = u + vi$ sarà determinata dalle seguenti condizioni:

1) È dato per $u$ in tutti i punti del contorno un valore, che per infinitamente piccole variazioni di luogo varia d'infinitamente piccole quantità dello stesso ordine, ma che del resto sono qualunque; (*)

2) Il valore di $v$ è dato arbitrariamente in un punto qualunque;

3) La funzione in tutti i punti dev'essere finita e continua.

Ma da queste condizioni è completamente determinata.

Infatti ciò si deduce dal teorema dell'articolo precedente, determinando, come è sempre possibile $\alpha + \beta i$ in modo che $\alpha$ sia nel contorno eguale al dato valore, e in tutta la superficie, per ogni variazione di luogo infinitamente piccola, la variazione di $\alpha + \beta i$ sia infinitamente piccola dello stesso ordine.

Dunque, in generale, $u$ può esser data nel contorno come una funzione di $s$ interamente arbitraria, e con essa $v$ rimane per tutto determinata; ma reciprocamente può anche prendersi $v$ comunque in ogni punto del contorno, e ne segue allora il valore di $u$. Il campo che si ha per la scelta dei valori di $w$ nel contorno abbraccia perciò una varietà di una dimensione sola per ogni punto, e la completa determinazione degli stessi richiede per ogni punto del contorno un equazione, ma non sarà necessario che ciascuna di queste equazioni si riferisca soltanto al valore di un termine in un sol punto del contorno. Per questa determinazione potrebbe anche esser data per ogni punto del contorno una equazione che mutasse continuamente la sua forma colla posizione di questo punto, e contenesse ambedue i termini; oppure, riguardando il contorno come diviso in $n$ parti, e ad ogni punto di una di queste

(*) Le variazioni di questo valore non sono veramente soggette ad altra limitazione, fuori che a quella di non essere discontinue lungo una parte del contorno: abbiamo fatto una più stretta limitazione per maggior semplicità.

parti essendo associati in un modo determinato $n - 1$ punti presi da ciascuna delle altre parti, potrebbero essere date per questi $n$ punti $n$ equazioni simultanee, che variassero colla loro posizione. Ma queste condizioni, il cui insieme forma una continua varietà, e che sono espresse da equazioni tra funzioni arbitrarie, affinchè siano ammissibili e sufficienti per la determinazione di una funzione per tutto continua nell'interno di una data estensione, abbisognano ancora di una limitazione o complemento mediante particolari equazioni di condizione - equazioni relative alle costanti arbitrarie - perchè sino a questo non si estende evidentemente la precisione del nostro teorema.

Nel caso in cui il campo delle variazioni di $z$ è rappresentato da una superficie molteplicemente connessa, queste considerazioni non richiedono alcun cangiamento, poichè l'applicazione del teorema dell'articolo 18, dà una funzione che differisce dalla precedente, solo nei cangiamenti che riceve per l'oltrepassare delle trasversali, cangiamenti, che possono esser fatti eguali a zero, se le condizioni ai limiti contengono un numero di costanti disponibili, eguale al numero delle trasversali.

Il caso in cui nell'interno vi è una interruzione di continuità lungo una linea si riduce al precedente, riguardando questa linea come una trasversale della superficie.

Se finalmente in un punto separato vi è una interruzione di continuità, e quindi secondo l'articolo 12 è ammesso che la funzione divenga infinita in un punto; conservando le supposizioni fatte nel primo caso, per questo punto potrà esser data una funzione di $z$, che sottratta renderà continua la funzione da determinarsi, e perciò rimarrà pienamente determinata. Poichè si prenda $\alpha + \beta i$ eguale a questa funzione data, in un circolo piccolo quanto si vuole descritto intorno al punto di discontinuità, ma del resto conformandosi a quanto abbiamo stabilito, sarà

$$\int \left\{ \left(\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)^2 \right\} dT = 0$$

estendendo l'integrale a questo circolo; ed estendendolo alle altre parti sarà eguale a una quantità finita, e si potrà applicare il teorema dell' articolo precedente, con che si ottiene una funzione che ha la voluta proprietà. Da ciò per il teorema dell' articolo 13 seguirà, che in generale, quando in punti separati di discontinuità la funzione diverrà infinita di ordine $n$, bisognerà aggiungere un numero di $2n$ costanti.

Rappresentata geometricamente (secondo l'articolo 15) una funzione $w$ di una variabile complessa $z$, in un dato campo di due dimensioni, dà una imagine S, che cuopre un Piano B, simile nelle minime parti, esclusi soltanto punti separati, a una superficie T che cuopre il Piano A. Le condizioni trovate necessarie e sufficienti alla determinazione della funzione, si riferiscono al suo valore, o nei punti del contorno, o in quelli di discontinuità; compariscono quindi (articolo 15) tutte come condizioni

per le posizioni del contorno di S, e danno per ogni punto del contorno una equazione di condizione. Se ciascuna delle stesse si riferisce a un sol punto del contorno, verranno rappresentate da una serie di curve, delle quali per ogni punto del contorno, una forma il luogo geometrico. Se due punti consecutivi del contorno sono assoggettati a due comuni equazioni di condizione, nascerà tra due parti del contorno una tal dipendenza, che presa arbitraria la posizione dell'una, ne seguirà la posizione dell'altra. In modo analogo per altre forme dell'equazioni di condizione risulta un significato geometrico, che noi ora non vogliamo indagare più oltre.

20.

L'introduzione delle quantità complesse in matematica ha la sua origine, e immediato scopo nella teorica delle più semplici relazioni tra le variabili, esprimibili per mezzo di operazioni di calcolo (*), cioè se estendiamo queste relazioni, dando alle variabili, alle quali si riferiscono, valori complessi, si presenta una permanente armonia e regolarità che altrimenti non potrebbe aversi. I casi nei quali questo è accaduto, abbracciano finora un piccol campo - si possono quasi tutti ridurre a quelle relazioni tra due variabili, nelle quali una o è funzione algebrica (**) dell'altra, o ha per derivata una funzione algebrica dell' altra - ma ad ogni passo che qui si è fatto, non solo si è dato ai risultati ottenuti senza l'aiuto delle quantità complesse una forma più semplice, e completa, ma si è aperto anche la via a nuove scoperte, come mostra la storia delle ricerche sopra le funzioni algebriche, circolari o esponenziali, ellittiche e Abeliane.

Mostriamo brevemente ciò che per le nostre ricerche nella teorica di tali funzioni si è ottenuto.

I metodi precedenti per lo studio di queste funzioni ponevano sempre come definizione una *espressione* della funzione, dalla quale fosse dato il di lei valore per *ogni* valore dell'argomento; le nostre ricerche dimostrano che, in conseguenza del carattere generale di una funzione di una variabile complessa, in una definizione di questa specie una parte dei dati, che servono alla determinazione delle funzioni è conseguenza dell'altra, e li riducono ai soli necessari. Questo rende essenzialmente più semplice lo studio delle medesime. Per esempio, per dimostrare l'eguaglianza di due espressioni della stessa funzione, si dovrebbero altrimenti trasformare l'una nell'altra, cioè mostrare che ambedue coincidono per ogni valore della variabile; ora basta la prova della loro coincidenza in una estensione molto minore.

---

(*) Riguardiamo qui come operazioni elementari l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, l'integrazione e la differenziazione, e una relazione la riguardiamo tanto più semplice, quanto minor numero di operazioni elementari contiene. In fatti tutte le funzioni introdotte fin qui nell'Analisi si possono definire mediante un numero finito di queste operazioni.

(**) Cioè quelle relazioni nelle quali tra le due variabili esiste un equazione algebrica.

Una teorica di queste funzioni fondata sopra a questi principj stabilirebbe la formazione della funzione (cioè il suo valore per ogni valore dell'argomento) indipendentemente da una determinazione della stessa mediante operazioni di calcolo, aggiungendo al general concetto di una funzione di una variabile complessa soltanto i dati necessari alla determinazione della funzione, e allora passerebbe alle differenti espressioni che possono darsi alla funzione. Il carattere comune a un genere di funzioni, che si esprimono in modo simile per operazioni di calcolo, si rappresenta allora sotto la forma di condizioni relative ai limiti, e alle discontinuità. Per esempio, se il campo delle variazioni di $z$ è disteso sopra tutto il piano infinito A semplicemente, o molteplicemente, e nello stesso la funzione ha soltanto discontinuità in punti separati, e soltanto acquista infiniti di ordine finito (dove per un infinito $z$ si riguarda come infinito di primo ordine questa quantità stessa, e per ogni finito valore $z'$ della stessa la quantità $\frac{1}{z-z'}$) la funzione è necessariamente algebrica, e reciprocamente ogni funzione algebrica sodisfa a queste condizioni.

Tralasceremo per ora lo sviluppo di questa teorica, il quale, come abbiamo osservato è diretto a porre in luce le semplici relazioni espresse da operazioni di calcolo, perchè escludiamo presentemente lo studio dell'espressione di una funzione.

Per la stessa ragione non ci occupiamo qui di mostrare l'uso del nostro teorema come fondamento di una teorica generale di queste relazioni, al che si richiede di provare che il concetto di una funzione di una variabile complessa, su cui qui ci siamo fondati, coincide pienamente con una relazione esprimibile per operazioni di calcolo (*).

## 21.

Per rischiarare però il nostro teorema generale gioverà un esempio della sua applicazione.

L'applicazione dello stesso indicata nel precedente articolo, sebbene tenuta di mira nella dimostrazione è però soltanto un applicazione particolare. Poichè se la relazione è data da un numero finito delle operazioni di calcolo ivi considerate come operazioni elementari, la funzione contiene soltanto un numero finito di parametri, la qual cosa per la forma di un sistema di condizioni ai limiti, e nelle discontinuità fra loro indipendenti, porta la conseguenza che tra loro non si possono presentare condizioni che si possano dare arbitrariamente in ogni punto di una linea. Per il no-

(*) Con ciò intenderemo ogni relazione esprimibile mediante un numero finito o infinito delle quattro più semplici operazioni di calcolo, addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Distinguiamo operazioni di calcolo da operazioni numeriche, in quanto che in quelle non si ha riguardo alle commensurabilità delle quantità sulle quali il calcolo deve effettuarsi.

stro attuale scopo sembra perciò più conveniente, di scegliere un altro esempio nel quale la funzione della variabile complessa dipenda da una funzione arbitraria.

Per facilitare l'intelligenza ci varremo della rappresentazione geometrica usata alla fine dell'articolo 18. Si presenta allora come uno studio della possibilità, di fare una rappresentazione di una data superficie, che sia connessa, e simile all'obiettiva nelle minime parti, e di forma data, dove perciò, nel linguaggio usato di sopra, per ogni punto del contorno della imagine è dato un luogo geometrico, e per tutti i medesimi sono dati (art. 5) il senso del contorno e i punti di giramento Ci limiteremo alla risoluzione di questo problema nel caso, in cui a ogni punto di una superficie corrisponde soltanto un punto dell'altra, e le superficie sono semplicemente connesse, nel qual caso la risoluzione è contenuta nel seguente teorema:

Due date superficie piane semplicemente connesse possono sempre riferirsi una all'altra in modo che a ogni punto dell'una corrisponda un punto dell' altra che si muove con quello con continuità, e che hanno simili le loro parti minime corrispondenti; e può a un punto interno e a un punto del contorno esser dato comunque il corrispondente; ma questo è sufficiente perchè la relazione sia determinata per tutti i punti.

Se due superficie T e R sono riferite a una terza S, in modo che si trovi similitudine tra le loro parti minime corrispondenti, ne risulta una relazione tra T e R, per la quale la stessa similitudine ha luogo. Il problema di riferire due superficie qualunque una all'altra in modo che tra le minime parti corrispondenti si trovi similitudine è ridotto perciò a riportare una superficie qualunque sopra un altra data simile nelle minime parti. Quindi se nel piano B nel punto in cui $w = 0$ descriviamo un circolo K col raggio 1, per provare il nostro teorema, è necessario soltanto di dimostrare il seguente:

Una superficie qualunque T semplicemente connessa che cuopre A può sempre esser riportata sopra a un circolo K continuamente connesso, e simile nelle minime parti, e soltanto in un modo, in guisa che al centro corrisponda un punto qualunque dato interno $O_0$, e a un punto qualunque della superficie un punto qualunque $O'$ del contorno della superficie T.

Per indicare a quale dei due punti $O_0$ ed $O'$, appartengono il valore di $z$ e il punto Q, diamo a queste lettere i medesimi indici, e descriviamo in T intorno a $O_0$ come centro un circolo qualunque $\Theta'$, che non si estenda sino al contorno, e non contenga punti di giramento. Se prendiamo le coordinate polari, ponendo $z-z_0=re^{\varphi i}$, avremo

$$\log(z-z_0) = \log r + \varphi i.$$

La parte reale varia perciò con continuità in tutto il circolo, fuor che nel punto $O_0$, dove diviene infinita. Ma la parte imaginaria, se si scelgono per tutto tra i va-

lori possibili di $\varphi$ i minimi positivi, lungo il raggio dove $z - z_0$ è reale, prenderà da una parte il valore zero, dall'altra il valore $2\pi$, ma in tutte le altre parti varierà con continuità. Evidentemente si può prendere invece di questo raggio un altra linea qualunque $l$ condotta dal centro alla periferia, in guisa che $\log(z - z_0)$ coll' oltrepassare del punto O dalla parte negativa (cioè dove secondo l'art. 8 $p$ è negativo) alla positiva di questa linea riceva una diminuzione improvvisa di $2\pi i$, ma del resto vari colla posizione di quello con continuità in tutto il circolo. Ora se noi prendiamo la funzione complessa di $x$ e di $y$, $\alpha + \beta i$, eguale a $\log(z - z_0)$ nel circolo $\Theta$, e fuori dello stesso, prolungando $l$ comunque fino al contorno, in modo che

1) nella periferia di $\Theta$ sia $= \log(z - z_0)$, nel contorno di T soltanto imaginaria,
2) nel passare dalla parte negativa alla positiva di $l$ vari di $-2\pi i$, ma per ogni infinitamente piccolo spostamento, vari di un infinitamente piccolo dello stesso ordine,

ciò che è sempre possibile; l'integrale

$$\int\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)^2\right\} dT$$

esteso al circolo $\Theta$ sarà nullo, esteso a tutte le altre parti avrà un valore finito, quindi $\alpha + \beta i$, aggiungendole una funzione di $x$ e $y$ continua e determinata in tutto fuor che in una costante imaginaria, la quale funzione è soltanto imaginaria nel contorno, può esser convertita in una funzione di $z$, $t = m + ni$. La parte reale $m$ di questa funzione sarà nulla nel contorno, eguale a $-\infty$ nel punto $O_0$, e varierà con continuità in ogni altra parte di T. Per ogni valore di $m$ compreso tra 0 e $-\infty$, T rimane perciò divisa da una linea in cui $m = a$, in parti nelle quali $m < a$ e che contengono $O_0$ nell'interno, e in parti dove $m > a$, e il contorno delle quali è formato in parte dal contorno di T, in parte dalla linea dove $m = a$. L' ordine della connessione della superficie da questa divisione o non è mutato, o è abbassato, perciò la superficie si spezza, poichè questo ordine è $= -1$, o in due pezzi dell' ordine di connessione 0 e $-1$, o in più di due pezzi. Ma questo ultimo caso è impossibile, perchè allora almeno in uno di questi pezzi $m$ dovrebbe essere per tutto finita e continua e costante in tutte le parti del contorno, quindi o dovrebbe avere in una parte di superficie, un valore costante, o dovunque in un punto o lungo una linea - un valore massimo o minimo contro ciò che è stabilito nell' articolo 11. III. I punti, nei quali $m$ è costante formano dunque linee chiuse per tutto semplici, le quali racchiudono il punto $O_0$ ed $m$ verso l'interno necessariamente decresce, onde segue, che, per un giro positivo (dove secondo l'articolo 8, $s$ cresce) $n$, in quanto è continua, continuamente cresce e quindi soltanto nell' oltrepassare dalla parte ne-

*

gativa alla positiva della linea $l$ riceve un improvvisa variazione di $-2\pi$ (*), diviene eguale a ogni valore compreso tra 0 e $2\pi$ una sola volta se astragghiamo da un multiplo di $2\pi$. Se ora poniamo $e^t = w$, $e^m$ ed $n$ divengono coordinate polari del punto Q rapporto al centro del circolo K. L' insieme dei punti Q forma allora evidentemente una superficie S distesa per tutto semplicemente sopra K; il punto $Q_0$ della stessa cade nel centro del circolo; il punto $Q'$ poi può per mezzo della costante da aggiungersi ad $n$ esser portata sopra un punto qualunque dato della circonferenza, come volevamo dimostrare.

Nel caso, in cui $O_0$ è un punto di giramento di $(n-1)^{esimo}$ ordine, si arriva allo scopo, sostituendo $\frac{1}{n}\log(z-z)$ a $\log(z-z_0)$, in un modo simile, e che si può facilmente completare colle considerazioni dell'articolo 14.

## 22.

Ometteremo qui il completo sviluppo delle ricerche del precedente articolo nel caso più generale, in cui a un punto di una superficie debbono corrispondere più punti dell'altra, e non è supposta per le medesime una semplice connessione, poichè prese da un punto di vista geometrico, tutte le nostre ricerche avrebbero potuto condursi in una forma più generale. Cioè la limitazione, a superficie piane semplici, esclusi punti separati, non è essenziale per le stesse; e il problema di riportare una data superficie qualunque sopra un altra qualunque data, in guisa che l'imagine risulti simile all'obiettiva nelle minime parti, può trattarsi in modo del tutto simile. Ci contentiamo qui di riferirci alle due memorie di *Gauss* citate all'articolo 3 e alle *disquis. gen. circa sup.* art. 13.

(*) Poichè la linea $l$ va da un punto interno al pezzo di superficie che si considera, a un punto esterno alla medesima, se essa ne incontra più volte il contorno, dev' andare una volta di più dall' interno all'esterno che dall'esterno all'interno, e la somma delle variazioni improvvise di $n$ in un giro sarà perciò sempre $= -2\pi$.



# ADDIZIONE ALLA NOTA

## SOPRA ALCUNE PROPRIETA' DELLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE ELETTRICA NEI FILI TELEGRAFICI, DEDOTTE DALLA TEORIA DI OHM.

**DI FILIPPO KELLER.**

### I.

In una precedente Nota (*) ho dato le formole, le quali esprimono l'intensità variabile della corrente elettrica per ciascun punto di un filo telegrafico; credo che forse non sarà senza interesse di conoscere qualche valore numerico relativamente a questa materia.

Primieramente ho calcolato una tavola per i valori di $\frac{s}{p}$ secondo la formola (6); questo quoziente rappresenta il rapporto fra la corrente variabile col tempo, e la corrente stazionaria per il caso della chiusura del circuito. Si è presa l' espressione $\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}=1$, con questa supposizione però la formola non diviene meno generale come prima, perchè essendo conosciuto il valore numerico di $\frac{k}{c}$, si può sempre trovare l'unità del tempo o della lunghezza in tal maniera, che questa condizione sia soddisfatta. Il quadro seguente poi non ha bisogno di altra spiegazione.

TAVOLA I.

| $t$ | Valore di $\frac{s}{p}$ per il punto $x =$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{1}{180}l$ | $\frac{1}{4}l$ | $\frac{1}{3}l$ | $\frac{89}{180}l$ | $\frac{1}{2}l$ | $\frac{2}{3}l$ | $\frac{3}{4}l$ | $l$ |
| 0. 1 | 5. 60500 | 5. 60068 | 1. 19906 | 0. 36136 | 0. 01342 | 0. 01174 | 0. 00009 | 0. 00001 | 0. 00000 |
| 0. 5 | 2. 50668 | 2. 50624 | 1. 84138 | 1. 44864 | 0. 75016 | 0. 73000 | 0. 28003 | 0. 15728 | 0. 03608 |
| 1 | 1. 77262 | 1. 77250 | 1. 52008 | 1. 34934 | 0. 97624 | 0. 96338 | 0. 61405 | 0. 47992 | 0. 30060 |
| 2 | 1. 27132 | 1. 27130 | 1. 19139 | 1. 13502 | 1. 00406 | 0. 99932 | 0. 86434 | 0. 80862 | 0. 72999 |
| 3 | 1. 09960 | 1. 09957 | 1. 07040 | 1. 04978 | 1. 00174 | 1. 00000 | 0. 95021 | 0. 92960 | 0. 90042 |
| 4 | 1. 03662 | 1. 03662 | 1. 02590 | 1. 01832 | 1. 00064 | 1. 00000 | 0. 98169 | 0. 97410 | 0. 96338 |
| 5 | 1. 01346 | 1. 01346 | 1. 00952 | 1. 00674 | 1. 00026 | 1. 00000 | 9. 99326 | 0. 99048 | 0. 98652 |
| 6 | 1. 00496 | 1. 00496 | 1. 00350 | 1. 00248 | 1. 00009 | 1. 00000 | 0. 99752 | 0. 99650 | 0. 99504 |
| 7 | 1. 00182 | 1. 00182 | 1. 00128 | 1. 00090 | 1. 60003 | 1. 00000 | 0. 99909 | 0. 99872 | 0. 99818 |
| 8 | 1. 00068 | 1. 00068 | 1. 00048 | 1. 00032 | 1. 00000 | 1. 00000 | 0. 99966 | 0. 99852 | 0. 99934 |
| 9 | 1. 00024 | 1. 00024 | 1. 00018 | 1. 00012 | 1. 00000 | 1. 00000 | 0. 99988 | 0. 99982 | 0. 99976 |
| 10 | 1. 00008 | 1. 00008 | 1. 00006 | 1. 00005 | 1. 00000 | 1. 00000 | 0. 99996 | 0. 99992 | 0. 99992 |

(*) V. Ann. di Mat. N° 5, 1859, pag. 305.

L'aspetto di questa tavola, o anche la formola generale mostra le particolarità seguenti.

Per $t = \infty$ tutti i valori di $\frac{s}{p}$ hanno per limite l'unità, come già sappiamo; ma la legge di questa variazione è molto diversa nelle due diverse metà del filo. Alla seconda metà CB (essendo C il punto $x = \frac{l}{2}$), $\frac{s}{p}$ cresce continuamente e non diviene mai maggiore che l'unità; mentre nella prima metà AC questo valore arriva a un certo massimo che è maggiore dell'unità, e avendo passato questo massimo si diminuisce, e arriva per $t = \infty$ al limite $= 1$. Questo massimo ha luogo *prima* per punti i quali hanno un $x$ *minore*. Immaginiamo un punto mobile il quale rappresenti l'andamento di questo massimo, questo punto parte al tempo $t = 0$ dal capo A, e entra per un $t = \infty$ al punto C del filo, e mentre il punto fa questo movimento il valore assoluto del massimo si diminuisce da $\infty$ continuamente fino alla unità. Per un $t$ grandissimo, o per dire meglio, per un $\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t$ grandissimo la formola si riduce a

$$s = p\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{l}x.\, e^{-t}\right)$$

e questa fa vedere, che al punto C lo stato stazionario si stabilisce *più presto*, che a ognun altro punto, perchè si annulla il secondo membro della parentesi. Per due punti in egual distanza dal punto C la differenza $s - p$ ha anche lo stesso valore assoluto, ma positivo alla prima metà e negativo alla seconda; e questa differenza è più grande per punti più vicini ai capi, che per quelli verso la metà.

Essendo più importante di conoscere il valore di $\frac{s}{p}$ per i due capi, che per i punti intermedii si è ancora costruita la tavola seguente:

TAVOLA II.

| $t$ | Valore di $\frac{s}{p}$ per il capo | | $t$ | Valore di $\frac{s}{p}$ per il capo | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | | A | B |
| 0. 1 | 5. 6050 | 0. 0000 | 2. 1 | 1. 2453 | 0. 7555 |
| 0. 2 | 3. 9633 | 0. 0000 | 2. 2 | 1. 2219 | 0. 7787 |
| 0. 3 | 3. 2360 | 0. 0018 | 2. 3 | 1. 2007 | 0. 7997 |
| 0. 4 | 2. 8025 | 0. 0117 | 2. 4 | 1. 1816 | 0. 8187 |
| 0. 5 | 2. 5066 | 0. 0360 | 2. 5 | 1. 1643 | 0. 8359 |
| 0. 6 | 2. 2882 | 0. 0749 | 2. 6 | 1. 1486 | 0. 8515 |
| 0. 7 | 2. 1185 | 0. 1248 | 2. 7 | 1. 1344 | 0. 8656 |
| 0. 8 | 1. 9817 | 0. 1837 | 2. 8 | 1. 1216 | 0. 8784 |
| 0. 9 | 1. 8684 | 0. 2409 | 2. 9 | 1. 1101 | 0. 8900 |
| 1. 0 | 1. 7726 | 0. 3006 | 3. 0 | 1. 0996 | 0. 9004 |
| 1. 1 | 1. 6904 | 0. 3587 | 3. 1 | 1. 0901 | 0. 9099 |
| 1. 2 | 1. 6189 | 0. 4140 | 3. 2 | 1. 0815 | 0. 9185 |
| 1. 3 | 1. 5561 | 0. 4659 | 3. 3 | 1. 0738 | 0. 9262 |
| 1. 4 | 1. 5006 | 0. 5142 | 3. 4 | 1. 0667 | 0. 9332 |
| 1. 5 | 1. 4512 | 0. 5587 | 3. 5 | 1. 0604 | 0. 9396 |
| 1. 6 | 1. 4071 | 0. 5995 | 3. 6 | 1. 0546 | 0. 9454 |
| 1. 7 | 1. 3676 | 0. 6369 | 3. 7 | 1. 0494 | 0. 9506 |
| 1. 8 | 1. 3321 | 0. 6709 | 3. 8 | 1. 0447 | 0. 9553 |
| 1. 9 | 1. 3001 | 0. 7019 | 3. 9 | 1. 0405 | 0. 9595 |
| 2. 0 | 1. 2713 | 0. 7300 | 4. 0 | 1. 0366 | 0. 9634 |

Per causa della piccolezza di $t$ era di gran vantaggio per il calcolo di questa tavola la formola

$$s_{(l,t)} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \left[ s_{\left(0,\frac{\pi^2}{4t}\right)} - s_{\left(0,\frac{\pi^2}{t}\right)} \right]$$

la quale si ottiene dalla combinazione delle due formole (ved. pag. 314)

$$s_{(l,t)} = 2s_{(0,4t)} - s_{(0,t)}, \qquad s_{(0,t)} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot s_{\left(0,\frac{\pi^2}{t}\right)} .$$

Finalmente si è costruita ancora la tavola seguente, rappresentando il valore di $\frac{s}{p}$ per l'*apertura* del circuito secondo la formola (9).

TAVOLA III.

| $t$ | Valore di $\frac{s}{p}$ per $x =$ $\frac{1}{2}l$ | $l$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0. 88380 | 0. 99664 |
| 1 | 0. 73247 | 0. 94734 |
| 2 | 0. 54940 | 0. 76758 |
| 3 | 0. 42565 | 0. 60100 |
| 4 | 0. 33125 | 0. 46834 |
| 5 | 0. 25795 | 0. 36480 |
| 6 | 0. 20086 | 0. 28410 |
| 7 | 0. 15646 | 0. 22126 |
| 8 | 0. 12184 | 0. 17232 |
| 9 | 0. 09489 | 0. 13420 |
| 10 | 0. 07391 | 0. 10452 |

Nel §. 6 fu accennato esistere un certo $\frac{s}{p}$, il quale rende eguale i tempi impiegati dal segno telegrafico corrispondente alle apertura per le due metà del filo. Per trovare questo valore si ha da risolvere l'equazione

$$e^{-\frac{1}{4}2z}-\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{4}2z}+\frac{1}{5}e^{-\frac{25}{4}2z}-\frac{1}{7}e^{-\frac{49}{4}2z}\dots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{1}{4}z}+\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{4}z}-\frac{1}{5}e^{-\frac{25}{4}z}-\frac{1}{7}e^{-\frac{49}{4}z}\dots\right]$$

e si trova

$$z=1,27598$$

e sostituendo questo $z$ in una delle due parti dell'equazione si avrà

$$\frac{s}{p}=0.6713586.$$

Ogni volta dunque, che il valore di $\frac{s}{p}$ è *minore* di 0.6713586, il segno impiega per la seconda metà *meno* tempo, che per la prima.

## II.

Quando una corrente stazionaria di intensità $p$ è stabilita in un filo conduttore gli autori tedeschi intendono sotto il termine *effetto magnetico* (magnetischer Effect) di una porzione di questo filo di lunghezza L il valore del prodotto $p$L. Riteniamo questa notazione anche per una corrente non stazionaria $s$: per avere l'effetto magnetico della porzione $(x_1\, x)$ del filo si avrà da trasformare quel prodotto in $\int_{x_1}^{x} s dx$.

Denotiamo ora come prima per $u$ la tensione, e per P l'effetto magnetico, la corrente ha per espressione $-\omega k\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, e per conseguenza si avrà

$$P = -\omega k \int_{x_1}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,.\, \mathrm{d}x = -\omega k(u_x - u_{x_1})$$

adunque l'effetto magnetico è in ogni istante proporzionale alla differenza delle tensioni alle due estremità.

Prendiamo adesso a considerare i quattro casi seguenti come applicazione di quest'ultima formola.

1) Siano le circostanze quelle del § 2. , considerando il valore di P per tutta l'estensione del filo, (come faremo anche nei tre casi seguenti), si abbiano le tensioni costanti ai due capi $a$ e 0, e per conseguenza sarà

$$P = -\omega k a$$

di quì si vede, che l'effetto magnetico è indipendente dal tempo.

2) Per il filo del § 3 si avrà per il capo A la tensione

$$u = \frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\, e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right]$$

e per il capo B la tensione 0 dunque

$$P = -\omega k\,\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\, e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t}\right].$$

Essendo $t = 0$ si trasformerà questo valore in

$$P = -\omega k\,\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

ma è noto che il valore della serie equivale a $\frac{1}{8}\pi^2$, e quindi

$$P = -\omega k a\,.$$

Quest'ultima equazione si può trovare anche facilmente, essendo per il tempo $t=0$ ancora la corrente costante è $= \frac{\omega a k}{l}$, questa quantità moltiplicata colla lunghezza $l$ dà il valore di P come sopra.

3) S'immagini che il filo sia con i due capi in comunicazione colla terra, e sia per il tempo 0 caricato con elettricità in qualunque maniera.

Qui i due capi hanno le tensioni 0 per ogni $t$, dunque essendo pure la diffe-

renza di esse 0, per conseguenza il valore di

$$P = 0.$$

Nel caso, che la distribuzione fosse simmetrica intorno alla metà, la giustezza di questa equazione si vede immediatamente, ma è notabile, che essa vale pure per una distribuzione *non* simmetrica.

4) S'immagini di nuovo questo filo, ma in tal maniera, che i due capi siano uniti, e senza essere in contatto colla terra. È noto, che il movimento del calorico in un filo segue la stessa legge dell'elettricità, e la formola che ha dato Fourier nella sua celebre opera: *La theorie de la chaleur* trova anche qui la sua applicazione per l'elettricità.

Si può argomentare che qui, come nel caso precedente, per ogni $t$ il valore di P sia nullo.

## APPENDICE.

Dopo finita la Nota precedente mi venne sott' occhio l' interessante Memoria dei Sigg. Guillemin e Burnouf: *Recherches sur la transmission de l'electricité dans les fils telegraphiques*, presentata all'Accademia di Parigi (*Comptes Rendus* del 23 Gen. 1860, pag. 183.)

Questa Memoria tratta di certi esperimenti, eseguiti per determinare le variazioni d'intensità della corrente elettrica ai due capi di un filo telegrafico secondo i diversi tempi, che duravano le comunicazioni del filo colla pila; essa è interessante perchè contiene una serie di esperimenti dai quali si può trarre il valore di $\frac{k}{c}$. Il conduttore aveva una lunghezza di 520 chilometri, probabilmente era di ferro, e quindi per questo metallo si avrà da intendere il valore di $\frac{k}{c}$, quale troviamo qui appresso.

Riteniamo la nostra notazione, abbiamo i valori corrispondenti di $t$ e $s$ (*Compt. Rend.* pag. 184)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t = 0,0019$ | $0,0030$ | $0,0055$ | $0,0070$ | $0,0090$ |
| $s = 0°,50$ | $3°,50$ | $10°,00$ | $16°,50$ | $17°,00$ |
| $t = 0,0120$ | $0,0150$ | $0,0170$ | $0,0190$ | $0,0220$ |
| $s = 18°,00$ | $18°,50$ | $18°,50$ | $18°,75$ | $19°,00$ |

dove $t$ è dato in secondi, $s$ rappresenta i gradi di un galvanometro, e il numero di questi gradi è proporzionale alla intensità come è accennato.

La corrente stazionaria segnava 19°, 50 $= p$, e i valori di $\frac{s}{p}$ saranno

0,025 0,179 0,512 0,846 0,871 0,923 0,948 0,948 0,961 0,974.

Secondo la Tavola II. questi $\frac{s}{p}$ corrispondono ai valori seguenti di $\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t$

0,45 0,79 1,40 2,55 2,74 3,25 3,65 3,65 3,95 4,50.

Ora per il primo risultato si caverà l'equazione

$$\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}\,.\,0,0019 = 0.45$$

e quindi

$$\frac{k}{c} = 24,0$$

prendendo la lunghezza di 520 chilometri per l'unità.

Egualmente gli altri nove dati somministrano per $\frac{k}{c}$ i valori

26,5 25,7 36,7 30,8 27,7 24,2 21,4 21,2 20,7.

Il medio di tutti sarà 25,9. Il significato di questo numero è, secondo le definizioni di sopra, il seguente:

Supponiamo, che il filo sia isolato al capo B, e caricato uniformemente di elettricità della tensione della pila; e chiamiamo la quantità che esso contiene una *carica*. Se venga posto il capo B in comunicazione colla terra la corrente stazionaria stabilita *dalla stessa pila* farà passare in ogni sezione del filo 25,9 cariche per secondo. Essendo l' unità della lunghezza il chilometro questa quantità è da moltiplicare per $520^2$, cioè pel quadrato della lunghezza, e si ottengono

$$\frac{k}{c} = 7003000\,.$$

Trovato adesso $\frac{k}{c}$ possiamo calcolare di nuovo la serie degli esperimenti per la intensità in diversi tempi. I tempi riportati all'unità della Tavola II (cioè i tempi moltiplicati con $25,9\pi^2$) sono

0,48 0,76 1,41 1,79 2,30 3,07 3,84 4,35 4,86 5,63

e le intensità corrispondenti secondo la Tavola II.

0,03 0,17 0,51 0,67 0,78 0,91 0,95 0,97 0,98 0,99.

*

Fra questi valori, e i valori osservati si trovano le differenze

0,00 —0,01 0,00 —0,17 —0,09 —0,01 0,00 +0,02 +0,02 +0,02.

Tutte le ricerche precedenti sono fatte nella supposizione, che l'isolamento del filo sia stato perfetto, e non è impossibile che le differenze trovate abbiano, almeno in parte, l'origine in questa supposizione inesatta, ma mancano affatto gli elementi per poter considerare questo punto.

Non volendo trascurare l'imperfezione dell'isolamento si avrebbe da adoperare la formola (pag. 315)

$$(17) \qquad s = \omega k a \beta \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}$$

$$+ 2k\omega \frac{a}{l} e^{-\frac{k}{c}\beta^2 t} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{(n+1)^2\pi^2}{(n+1)^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \cos \frac{(n+1)\pi}{l} x \,.\, e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c}t} \right]$$

e per prima cosa si avrebbe da determinare il valore di $\beta$. Questo valore dipenderà dalla periferia del filo, dallo stato di umidità dell'atmosfera, e probabilmente anche dalla forma della sezione del filo. Esso non è difficile da determinare in pratica, si ha solo da osservare con un galvanometro la intensità della corrente per le due estremità del filo. Chiamiamo $r$ il quoziente di queste due quantità si ha secondo la formola (17)

$$r = \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} \qquad \text{donde} \qquad \beta = \frac{1}{l} \text{ Lg. } \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r}$$

ove per la radice $e^{\beta l}$ si prenda quella proveniente dal segno $+$.

Conoscendo $\beta$ non abbiamo più alcuna incognita nella formola, ma il calcolo numerico con essa è un poco incomodo. Probabilmente sarà $\frac{\beta l}{\pi}$ pel solito una frazione piccola in modo che si possa sostituire

$$1 - \left(\frac{(\beta l)}{(n+1)\pi}\right)^2 \quad \text{invece di} \quad \frac{(n+1)^2\pi^2}{(n+1)^2\pi^2 + \beta^2 l^2}$$

e la tavola II. sarà ancora utile per il calcolo numerico.

S'intenderà, che la legge trovata (pag. 312) che i tempi impiegati dal segno telegrafico per due linee di diverse lunghezze stiano in ragione del quadrato delle lunghezze, non può avere più luogo con esattezza in caso che $\beta$ non sia nulla; e forse è questa anche una ragione che l'esperienze non hanno confermato rigorosamente la teoria.



## NOTE SUR L'ÉQUATION DES DIFFERENCES POUR UNE ÉQUATION DONNÉE DE DEGRÉ QUELCONQUE.

**PAR M^r. A. CAYLEY.**



Il s'agit de trouver l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines d'une équation donnée (*)

$$(*)(v,\ 1)^n = 0.$$

En représentant cette équation par $\varphi v = 0$, soient $x, y$ deux racines différentes quelconques, on a non seulement $\varphi x = 0$, $\varphi y = 0$; mais aussi

$$\varphi x + \varphi y = 0\ , \quad \frac{\varphi x - \varphi y}{x - y} = 0$$

et en écrivant dans ces équations

$$x + y = 2s\ , \quad (x - y)^2 = 4\theta$$

(ou ce qui est la même chose $x = s + \sqrt{\theta}$, $y = s - \sqrt{\theta}$) en obtient deux équations rationelles en $s$, et $\theta$, et en eliminant $s$, on obtient l'équation qui donne

$$\theta = \tfrac{1}{4}\,(x - y)^2.$$

Il convient de changer un peu la forme des équations , en effet la première équation est du degré $n$, la seconde du degré $n - 1$ pour rapport à $s$; mais en écrivant les deux équations sous la forme

$$n(\varphi x + \varphi y) - (x + y)\,\frac{\varphi x - \varphi y}{x - y} = 0\,, \qquad \frac{\varphi x - \varphi y}{x - y} = 0$$

l'une, et l'autre équation sera du degré $n - 1$ par rapport à $s$. La forme sous laquelle j'ai présenté la methode de Bezout s'appliqué au problème. En représentant les deux équations par $\mathrm{F}s = 0$ , $\mathrm{G}s = 0$ j'ecris pour le moment

$$\varphi(s + \sqrt{\theta}) = \mathrm{A}\,, \qquad \varphi(s - \sqrt{\theta}) = \mathrm{B}.$$

On a aussi

$$\mathrm{F}s = n(\mathrm{A} + \mathrm{B}) - s\,\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{\sqrt{\theta}}\,, \qquad \mathrm{G}s = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{\sqrt{\theta}}$$

et en écrivant

$$\varphi(s' + \sqrt{\theta}) = \mathrm{A}'\,, \qquad \varphi(s' - \sqrt{\theta}) = \mathrm{B}'.$$

(*) Con questa notazione l'Autore intende un polinomio del grado $n$ con i coefficienti binomiali.

*B. T.*

On a de même

$$Fs' = n(A' + B') - \frac{s'(A' - B')}{\sqrt{\theta}}, \qquad Gs' = \frac{A' - B'}{\sqrt{\theta}}.$$

On obtient de là

$$\Phi(s, s') = \frac{Fs \,.\, Gs' - Fs'Gs}{s - s'}$$

$$= \left[\left(n(A+B) - \frac{s(A-B)}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{A' - B'}{\sqrt{\theta}} - \left(n(A'+B') - \frac{s'(A'-B')}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{(A-B)}{\sqrt{\theta}}\right]\frac{1}{s - s'}.$$

On en reduisant

$$-\Phi(s, s') = \frac{2n(AB' - A'B)}{(s - s')\sqrt{\theta}} + \frac{(A - B)(A' - B')}{\theta}.$$

Donc en rétablissant les valeurs de A, B, A', B' on a la fonction

$$\frac{2n\left[\varphi(s + \sqrt{\theta})\,\varphi(s' - \sqrt{\theta}) - \varphi(s' + \sqrt{\theta})\,\varphi(s - \sqrt{\theta})\right]}{(s - s')\sqrt{\theta}}$$

$$+ \frac{\left[\varphi(s + \sqrt{\theta}) - \varphi(s - \sqrt{\theta})\right]\left[\varphi(s' + \sqrt{\theta}) - \varphi(s' - \sqrt{\theta})\right]}{\theta}$$

laquelle sera de la forme

$$\left(\begin{array}{llll} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,0} & & & \end{array}\right)(s, 1)^{n-2}(s', 1)^{n-2}$$

où les coefficients $a$ sont des fonctions rationelles de $\theta$, et en égalant à zero le determinant formé avec ces coefficients on a l'équation qu'il s'agissait de trouver. Quoique cette solution soit analytiquement la plus simple, j'ai une autre methode nouvelle plus adaptée au calcul laquelle j'appliqué à trouver l'équation des différences pour l'équation quintique

$$(a, b, c, d, e, f)(v, 1)^5 = 0.$$

Londres 4ieme Fev. 1860.

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

## SERIE ORDINATE PER FATTORIALI INVERSI.

(SCHLOEMILCH, ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, 1859, 6 Heft.)

1. Eulero diede nel suo Calcolo integrale (*) la formola

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{-\frac{m+n-\mu}{n}}(A+Bx^n+Ca^{2n}+Dn^{3n}+\ldots)dx$$

$$=\left[A+B\frac{m}{\mu}+C\frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}+D\frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}+\cdots\right]\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{-\frac{m+n-\mu}{n}}dx,$$

da cui, come osservò il Binet (**), si deduce la somma di molte serie ipergeometriche: se ne deducono pure le serie considerate dal Sig. Schloemilch che procedono per termini proporzionali ai valori reciproci de'fattoriali $z(z+1)(z+2)\ldots(z+m)$, e servono ad esprimere funzioni $\varphi(z)$ determinate da equazioni della forma

$$\varphi(z)=\int_0^1(1-t)^{z-1}f(t)\,dt, \qquad \varphi(z)=\int_0^1\frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}f(t)\,dt,$$

$$\varphi(z)=\int_0^1\int_a^b(1-t)^{z-1}f(t,v)dt\,dv,$$

dove $z$ è positivo e $f(t)$, $f(t,v)$ rappresentano funzioni che si possono svolgere in serie ordinate per le potenze intere e positive di $t$. Così rispetto alla prima espressione di $\varphi(z)$ basterà prendere nella formola d'Eulero

$$m=1,\ n=1,\ \mu=z+1,\ A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=f(x).$$

Ma il Sig. Schloemilch entra in particolari interessanti relativamente alla forma e ai limiti del resto o termine completivo delle accennate serie: ad una formola di questa specie giungeremo prontamente ponendo

(*) Vol. I. Sez. I, pag. 247 (Petropoli, 1768).
(**) Journal de l'école Polytechnique, 27. cahier.

$$\int_\alpha^1 (1-\alpha)^{z-1} f(\alpha) d\alpha = \frac{(1-\alpha)^z f(\alpha)}{z} + \frac{(1-\alpha)^{z+1} f'(\alpha)}{z(z+1)} + \frac{(1-\alpha)^{z+2} f''(\alpha)}{z(z+1)(z+2)} + \cdots$$
$$+ \frac{(1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n-1)}(\alpha)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} + R_n ,$$

talchè per $\alpha = 1$ sarà $R_n = 0$, e differenziando tutti i termini rispetto ad $\alpha$, e riducendo se ne dedurrà

$$0 = \frac{(1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} + \frac{dR_n}{d\alpha},$$

donde

$$R_n = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_\alpha^1 (1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha) d\alpha .$$

Posto infine $\alpha = 0$, risulterà

$$(1) \qquad \int_0^1 (1-\alpha)^{z-1} f(\alpha) d\alpha = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z(z+1)} + \frac{f''(0)}{z(z+1)(z+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} + \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha) d\alpha .$$

2. Per prima applicazione il Sig. Schlömilch trova l'identità facile a dimostrarsi (*)

$$(2) \qquad \frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x(x+1)(x+2)} - \ldots .$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \frac{1}{x+\alpha} .$$

Da ciò, moltiplicando per $t^{\mu-1} e^{-kt} dt$, e integrando, deduce una espressione della funzione

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x+\alpha} t^{\mu-1} e^{-kt} dt$$

nei due casi di $\alpha = t$, e $\alpha = -t\sqrt{-1} : x, \mu$ e $k$ sono numeri positivi. Posto

$$Q_0 = \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-kt} dt , \qquad Q_m = -\int_0^\infty \alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-1-\alpha) t^{\mu-1} e^{-kt} dt,$$
$$R_n = -\int_0^\infty \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{x+\alpha} t^{\mu-1} e^{-kt} dt ,$$

(*) Annali di scienze mat. e fisiche 1854, pag. 151.

si avrà

$$\varphi(x) = \frac{Q_0}{x} + \frac{Q_1}{x(x+1)} + \frac{Q_2}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

$$+ \frac{Q_{n-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \frac{R_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Ora nel caso di $\alpha = t$, ogni differenza $m - \alpha$ è numericamente minore di $m+\alpha$, e però $(m-\alpha)^2$ è minore numericamente di $m^2 - \alpha^2$, ossia $m^2 - t^2$, onde

$$\left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{1.2\dots(n-1)}\right)^2$$

è minore numericamente del prodotto

$$(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\left(1-\frac{t^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{t^2}{(n-1)^2}\right)$$

il quale crescendo $n$ indefinitamente ha per limite $\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}$, quantità non superiore ad 1 : dunque il termine completivo

$$\frac{R_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$$

avrà zero per limite, poichè il limite dell'espressione

$$\frac{1.2\dots(n-1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^\infty \frac{t}{x+t}\, t^{\mu-1}\, e^{-kt}\, dt$$

manifestamente è zero quando si suppone $x$ positivo. Nel caso di $\alpha = -t\sqrt{-1}$, il modulo dell'espressione immaginaria

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{1.2\dots(n-1)}$$

sarà

$$\sqrt{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{4}\right)\left(1+\frac{t^2}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{t^2}{(n-1)^2}\right)}$$

che cresce con $n$ e per $n$ infinito eguaglia

$$\sqrt{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi t}} \quad \text{ossia} \quad e^{\frac{1}{2}\pi t}\sqrt{\frac{1-e^{-2\pi t}}{2\pi t}};$$

quindi chiamato $\theta$ l'argomento della medesima espressione, il limite del termine

$$\frac{R_n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

non eccederà quello di

$$\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\int_0^\infty\sqrt{\frac{1-e^{-2\pi t}}{2\pi t}}\;\frac{ie^{\theta i}}{x-ti}\,t^{\mu}\,e^{-(k-\frac{\pi}{2})t}\,dt$$

dove $i=\sqrt{-1}$: ma quest'ultimo integrale ha senza dubbio un valore finito se si prende $k>\frac{1}{2}\pi$, restando sempre $x$ positivo, e però l'accennato limite è allora zero. Adunque avremo per $\varphi(x)$ in ambedue i casi una serie convergente.

Negli stessi due casi abbiamo

$$\frac{x}{x+\alpha}=z\int_0^\infty e^{-(t+z)u}\,du\,,$$

se supponiamo $z=x$ nel primo caso, e $z=xi$ nel secondo, e ne risulta

$$\varphi(x)=\frac{z}{x}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-zu}\,e^{-(k+u)t}\,t^{\mu-1}\,dt\,du=\frac{z}{x}\,\Gamma(\mu)\int_0^\infty e^{-zu}(k+u)^{-\mu}\,du:$$

poscia fatto $k+u=\frac{v}{x}$, otterremo nel primo caso

$$\varphi(x)=\Gamma(\mu)\,x^{\mu-1}\,e^{kx}\int_{kx}^\infty\frac{1}{v^{\mu}}\,e^{-v}\,dv\,,$$

e nel secondo

$$\varphi(x)=\Gamma(\mu)\,ix^{\mu-1}\,e^{kxi}\int_{kx}^\infty\frac{1}{v^{\mu}}e^{-vi}\,dv\,.$$

Pertanto avremo gl'integrali

$$\int_\nu^\infty\frac{1}{v^{\mu}}\,e^{-v}\,dv\,,\qquad\qquad\int_\nu^\infty\frac{1}{v^{\mu}}\,e^{-vi}\,dv$$

svolti in serie convergenti di fattoriali reciproci. Prendendo $\mu=1$, $\mu=\frac{1}{2}$ si avranno formole per calcolare valori approssimati de' *logaritmi integrali*, de' *seni* e *coseni integrali*, del trascendente Krampiano $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$; si avrà pure una formola utile pel calcolo dell'integrale trattato da Legendre (*)

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_0^x\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1}du\,,$$

(*) Traité des fonctions elliptiques, Tom. II, chap. XVII.

poichè facendo

$$u = e^{-v}, \quad x = e^{-y}$$

si trova

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_y^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv,$$

e questo integrale è compreso nei precedenti se l'esponente $\alpha - 1$ è negativo al qual caso si riducono tutti gli altri.

3. La formola (2) è compresa in un'altra più generale data da Nicole (*), che si deduce dall'identità

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-x} + \frac{b+x}{(a-x)(a-b)}:$$

ponendo successivamente

$$x = 0, \quad x = c, \quad x = d, \ldots.$$

moltiplicando le trasformate ordinatamente per

$$1, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{b(b+c)}{a(a+c)}, \quad \frac{b(b+c)(b+d)}{a(a+c)(a+d)}, \ldots,$$

e sommando i prodotti, fatte le riduzioni si trova

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+c)} + \frac{b(b+c)}{a(+c)(a+d)} + \ldots.$$

$$+ \frac{b(b+c)(b+d)\ldots(b+p)}{a(a+c)(a+d)\ldots(a+p)(a+q)} + \frac{b(b+c)(b+d)\ldots(b+p)(b+q)}{a(a+c)\ldots(a+p)(a+q)(a-b)}.$$

Questa formola si cambia nella (2) se si fa

$$a = x, \; b = -\alpha, \; c = 1, \; d = 2, \; e = 3, \ldots;$$

facendovi

$$a = 2n+3, \; b = 2n+2, \; c = 2, \; d = 4, \; e = 6, \ldots,$$

e moltiplicando per $2n$ si ottiene

$$2n = \frac{2n}{2n+3} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} \cdot \frac{2n+4}{2n+7} + \ldots,$$

e alla medesima equazione si giunge per mezzo della formola (2) prendendo

$$x = \frac{2n+3}{2}, \; \alpha = -\frac{2n+2}{2}.$$

(*) Mém. Acad. des Sciences de Paris pour 1727, pag. 257. — Annales de Math. par Gergonne, T. V, pag. 149.

Il Sig. Sarrus che la trovò per altra via e pel solo caso di $n$ intero e positivo la qualificava come un « résultat remarquable, qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *a priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs; » e il Sig. Gergonne aggiungeva: « il serait curieux de savoir si cette formule aurait également lieu pour une valeur fractionnaire on négative de $n$ » (*). Avendo nella formola di Nicole anche il termine completivo della serie, si potrà giudicare per quali valori di $n$ la serie sia convergente.

Se si svolgano i due membri dell'equazione (2) per le potenze ascendenti di $\alpha$, il che sarà permesso ogniqualvolta il valor numerico di $\alpha$ sia inferiore a quello di $x$, il paragone dei termini contenenti una stessa potenza darà un'equazione identica che servirà a trasformare in serie di fattoriali reciproci qualsivoglia delle potenze

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^3},\quad \frac{1}{x^4},\ldots,$$

ed è facile vedere che nel caso di $x$ positivo tutte queste serie saranno convergenti. Infatti supponiamo $\alpha$ negativo e cambiamolo in $-\alpha$: l'ultimo termine della formola (2) diverrà

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\,\frac{1}{x-\alpha},$$

che uguaglia la quantità costante $\dfrac{\alpha}{x(x-\alpha)}$ divisa pel prodotto

$$\frac{x+1}{\alpha+1}\cdot\frac{x+2}{\alpha+2}\cdots\frac{x+n-1}{\alpha+n-1}=\left(1+\frac{x-\alpha}{\alpha+1}\right)\left(1+\frac{x-\alpha}{\alpha+2}\right)\cdots\left(1+\frac{x-\alpha}{\alpha+n-1}\right)$$

evidentemente maggiore di

$$1+(x-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+n-1}\right)$$

e però di

$$1+(x-\alpha)\left(\log\frac{\alpha+2}{\alpha+1}+\log\frac{\alpha+3}{\alpha+2}+\ldots+\log\frac{\alpha+n}{\alpha+n-1}\right)=1+(x-\alpha)\log\frac{\alpha+n}{\alpha+1},$$

essendo

$$\log\left(1+\frac{1}{\alpha+m}\right)<\frac{1}{\alpha+m};$$

così quell'ultimo termine sarà minore di

(*) Annales de Mathém. par Gergonne, tom. X, pag. 222.

$$\frac{\alpha}{x\left(1+(x+\alpha)\log\frac{\alpha+n}{\alpha+1}\right)(x-\alpha)}$$

e crescendo $n$ in infinito avrà per limite zero. Ma il medesimo termine è la somma dei termini completivi di tutte le accennate serie moltiplicati per $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^3$, .... : dunque ciascuno di questi termini completivi dovrà aver per limite zero.

Se $\alpha$ si fa positivo nella formola (2), l'ultimo termine di essa può risolversi in tre fattori :

$$1^\circ \quad \frac{\alpha}{x(x+\alpha)}$$

che è costante,

$$2^\circ \quad \frac{1\,.\,2\,...\,(n-1)}{(x+1)(x+2)\,...\,(x+n-1)}$$

che tende ad annullarsi, mentre $n$ cresce, poichè dalla dimostrazione precedente si trae ch'esso è minore di $\dfrac{1}{1+x\log n}$;

$$3^\circ \quad \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,...\,(\alpha-n+1)}{1\,.\,2\,...\,(n-1)}(-1)^n,$$

che tende pure ad annullarsi, poichè chiamato $k$ un numero intero maggiore di $\alpha$ e minore di $n$, possiamo riguardarlo come il prodotto della funzione costante

$$-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\,...\,(k-\alpha)}{1\,.\,2\,...\,k}$$

per l'altra frazione

$$\frac{(k-\alpha+1)(k-\alpha+2)\,...\,(k-\alpha+m-1)}{(k+1)(k+2)\,...\,(k+m-1)}$$

ove si è fatto $m=n-k$, e questa seconda frazione sarà minore di

$$\frac{1}{1+\alpha\log\dfrac{n}{k+1}}$$

e quindi decrescerà indefinitamente : adunque per $x$ e $\alpha$ positivi l'equazione (2) trasformerà $\dfrac{1}{x+\alpha}$ in una serie convergente anche se sia $\alpha > x$, e la convergenza sarà più rapida che non suppone il Sig. Schlömilch il quale considera il terzo fattore dell'ultimo termine come inferiore all'unità, ma non come infinitesimo.

Ponendo $x=1$, e moltiplicando per $1+\alpha=m$, si trae dalla stessa equazione (2)

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

che sussisterà finchè $\alpha$ sarà compreso tra $-1$ e $+\infty$, e quindi per tutti i valori positivi di $m$.

4. La trasformazione delle potenze $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ... in serie di fattoriali si ottiene anche facendo

$$u=\frac{1}{x}, \qquad h=\Delta x=1$$

nella formola simbolica

$$h^n\,\mathrm{D}^n u=\left[\,\log(1+\Delta)\right]^n u\,,$$

e altra volta ho notato (*) che in questa formola il coefficiente di $\Delta^m u$ eguaglia il valore di $\frac{\mathrm{d}^n\,\mathrm{A}_m}{\mathrm{d}\alpha^n}$ per $\alpha=0$, se pongasi

$$\mathrm{A}_m=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{1\,.\,2\ldots m}.$$

Altre formole simboliche furono indicate nello stesso luogo e dal Cauchy nei *Comptes rendus* (**) come atte a svolgere le funzioni per serie di fattoriali inversi; il Cauchy vi diede la formola simbolica

$$\int_0^\infty e^{-tx} f\left[k\,(1-e^{-t})\,\right]\mathrm{d}t=f(-k\Delta)\,\frac{1}{x},$$

che suppone $\Delta x=1$, e che equivale alla precedente formola (1). Binet (***) ampliò la formola d'Eulero riferita al num.° 1, ed esaminò la convergenza delle serie ordinate secondo gl'integrali Euleriani $\mathrm{B}(\,p+i,q)$. Quanto alla convergenza, giova spesso a farla riconoscere speditamente il principio per cui integrando una serie che resta convergente fra i limiti dell'integrazione si ottiene una serie pur convergente.

Ho dato eziandio i termini completivi delle accennate formole simboliche, e le due equazioni (****)

$$\int_0^1 f(z+h\alpha)\mathrm{d}\alpha=f(z)+\alpha_1\Delta f(z)+\alpha_2\Delta^2 f(z)+\ldots+\alpha_2\Delta^n f(z)+\mathrm{R}_n\,,$$

$$\frac{1}{h}\int_0^1 \mathrm{F}(z+h\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{h}\mathrm{F}(z)+\frac{1}{2h}\Delta\mathrm{F}(z)+\rho_1\,\Delta u+\rho_2\,\Delta^2 u+\ldots+\rho_n\,\Delta^n u+\mathrm{S}_n\,,$$

---

(*) Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 87.

(**) Ivi, pag. 72, 88; Comptes rendus de l'Accadémie des Sciences, tom. 39, pag. 129, 169, 214.

(***) Journal de l'Ecole Polytechnique, 27 cahier, pag. 307; ivi pag. 140 e 271.

(****) Annali di sc. matem. e fisiche, 1855, pag. 76 e 80.

dove

$$\Delta z = h, \quad \alpha_m = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{1.2\ldots m} d\alpha, \quad R_n = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{1.2\ldots n} (\Delta^n R) d\alpha,$$

$$R = \frac{f(z+h\alpha)-f(z)}{h\alpha}, \qquad u = \frac{dF(z+ah)}{dz},$$

$$\rho_m = (-1)^m \int_0^1 \frac{(\alpha+a-1)(\alpha+a)\ldots(\alpha+a+m-2)}{1.2\ldots m}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) d\alpha,$$

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\alpha+a-1)(\alpha+a)\ldots(\alpha+a+n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\Delta^n S)\, d\alpha,$$

$$S = \frac{F'(z+ah)-F'(z-h\alpha+h)}{h(\alpha+a-1)}, \quad F'(z) = \frac{dF(z)}{dz},$$

$a$ indica una quantità scelta ad arbitrio, e le differenze $\Delta^n R$, $\Delta^n S$ debbono esser prese rispetto ad $\alpha$ e $z$ nel medesimo tempo, supponendo $\Delta z = h$, e $\Delta\alpha = -1$. Prendendo per $f(z)$ o $F(z)$ l'integrale

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-zu}}{1-e^{-u}} f(u)\, du,$$

e supponendo $z > 0$, $h = 1$, si otterranno trasformazioni della sommatoria $\sum\varphi(z)$ nell'ipotesi di

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zu} f(u)\, du,$$

poichè si avrà

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \varphi(z),$$

e non si cadrà nell' ambiguità che nasce dalle funzioni periodiche arbitrarie quando si passa da una differenza finita al suo integrale. Ma pei casi particolari della funzione $\varphi(z)$ trattati dallo Schloemilch sarà più spedito far uso della formola (1).

Sia

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-zu}}{1-e^{-u}} du,$$

e però $\varphi(z) = \frac{1}{z}$: essendo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-zu}}{u} du = \log z, \qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right) e^{-u}\, du = C,$$

dove C indica la *costante Mascheroniana,* avremo

$$\sum \frac{1}{z} = C + \log z - \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) e^{-zu} \, du \, ,$$

e facendo $e^{-u} = 1 - \alpha$, ne dedurremo

$$\sum \frac{1}{z} = C + \log z - \int_0^1 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) (1 - \alpha)^{z-1} \, d\alpha \, ,$$

cosicchè posto

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} = f(\alpha) \, ,$$

la formola (1) darà una trasformazione della funzione

$$\sum \frac{1}{z} - C - \log z$$

in serie di fattoriali reciproci. Il termine completivo sarà

$$- \frac{1}{z(z+1) \ldots (z+n-1)} \int_0^1 (1 - \alpha)^{z+n-1} \, D^n \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) d\alpha,$$

che rappresenteremo con

$$- \frac{\rho_n}{z(z+1) \ldots (z+n-1)} \, .$$

Ma si ha in serie convergente

$$- \frac{\alpha}{\log(1 - \alpha)} = \int_0^1 (1 - \alpha)^v \, dv = 1 - h_0 \alpha - \frac{h_1}{1} \alpha^2 - \frac{h_2}{1.2} \alpha^3 - \frac{h_3}{1.2.3} \alpha^4 - \ldots \, ,$$

ove

$$h_m = \frac{1}{m+1} \int_0^1 v(1 - v)(2 - v) \ldots (m - v) dv \, ,$$

sicchè i coefficienti $h_m$ sono tutti positivi: quindi

$$D^n \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) > D^n \left( h_0 + \frac{h_1}{1} \alpha + \frac{h_2}{1.2} \alpha^2 + \ldots + \frac{h_n}{1 \, . \, 2 \ldots n} \alpha^n \right) = h_n \, ,$$

e però

$$\rho_n > h_n \int_0^1 (1 - \alpha)^{z+n-1} \, d\alpha \, , \qquad \text{ossia} \qquad \rho_n > \frac{h_n}{z+n} \, .$$

Avremo pure

$$D^n \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) = h_n + \frac{h_{n+1}}{1} \alpha + \frac{h_{n+2}}{1 \, . \, 2} \alpha^2 + \frac{h_{n+3}}{1.2.3} \alpha^3 + \ldots \, ,$$

onde sostituendo e integrando dedurremo

$$\rho_n = \frac{1}{z+n}\left(h_n + \frac{h_{n+1}}{z+n+1} + \frac{h_{n+2}}{(z+n+1)(z+n+2)} + \ldots\right),$$

e quindi

$$\rho_n < \frac{1}{z+n}\left(h_n + \frac{h_{n+1}}{n+1} + \frac{h_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right),$$

ossia

$$\rho_n < \frac{1}{z+n}\int_0^1 v(1-v)\,..\,(n-v)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n-v+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n-v+1)(n-v+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ..\right)dv\,;$$

dalla formola (2) si vede che la serie contenuta in questa espressione ha per somma

$$\frac{1}{n+1-(n-v+1)} = \frac{1}{v},$$

dunque fatto

$$g_n = \int_0^1 (1-v)(2-v)\ldots(n-v)dv\,, \qquad \text{sarà} \qquad \rho_n < \frac{g_n}{z+n};$$

ed è chiaro (num.° 3) che la frazione

$$\frac{(1-v)(2-v)\ldots(n-v)}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

decresce indefinitamente al crescere di $n$, e che per conseguenza anche l'indicato termine completivo avrà per limite zero.

Sia poi

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-zu}}{1-e^{-u}}\,u\,du\,,$$

e così $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ : facendo $e^{-u} = 1-\alpha$ , avremo

$$\Sigma\frac{1}{z^2} = -\int_0^1 \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha + \int_0^1 (1-\alpha)^{z-1}\,\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

e sostituendo

$$f(\alpha) = \frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}$$

nella formola (1) otterremo una serie che avrà per termine completivo

$$-\frac{\rho_n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

posto

$$\rho_n = \int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1} D^n\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right) d\alpha \cdot$$

Ma

$$\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^3}{4} + \ldots\ldots,$$

onde

$$D^n\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right) > D^n\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n+1}\right) = \frac{1.\ 2.\ n}{n+1},$$

$$D^n\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right) < D^n\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \ldots\right)$$

$$= D^n\Big(1 - \log(1-\alpha)\Big) = \frac{1\ .\ 2 \ldots (n-1)}{(1-\alpha)^n};$$

quindi sostituendo

$$\frac{1\ .\ 2 \ldots n}{(n+1)(z+n)} < \rho_n < \frac{1\ .\ 2 \ldots (n-1)}{z}$$

e ne risulta che il termine completivo è nullo per $n$ infinito.

Finalmente si debba svolgere la funzione

$$\log \Gamma(z) = \sum \log z :$$

abbiamo (*)

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \mu(z)\,, \\ &\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\log(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right)(1-\alpha)^{z-1}; \end{aligned} \right.$$

per maggiore generalità cambieremo nella formola (1) $z$ in $z+a$, e porremo

$$f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right),$$

indi facendo

$$\rho_n = \int_0^1 (1-\alpha)^{z+a+n-1} D^n.\ \frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right) d\alpha$$

avremo per termine completivo

$$\frac{\rho_n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

(*) Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 83—84.

Ora

$$\frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\log(1-\alpha)}\right)=\frac{1}{\alpha}\int_0^1(1-\alpha)^{v-a}\left(\frac{1}{2}-v\right)dv$$

$$=k_0+\frac{k_1}{1}\alpha+\frac{k_2}{1.2}\alpha^2+\frac{k_3}{1.2.3}\alpha^3+\ldots,$$

ove

$$k_m=\frac{1}{m+1}\int_0^1(a-v)(a-v+1)\ldots(a-v+m)\left(\frac{1}{2}-v\right)dv,$$

e questa serie sarà convergente a causa di $0<\alpha<1$; di più supposto $a$ non minore di $1$, i coefficienti $k_m$ saranno positivi, poichè fatto $v=1-t$, si ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(a-v)(a-v+1)\ldots(a-v+m)\left(\frac{1}{2}-v\right)dv$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}(a-1+t)(a+t)\ldots(a+m-1+t)\left(\frac{1}{2}-t\right)dt,$$

e quindi

$$(m+1)k_m=\int_0^{\frac{1}{2}}\Big((a-t)(a-t+1)\ldots(a-t+m)-(a-1+t)(a+t)\ldots$$
$$(a+m-1+t)\Big)\left(\frac{1}{2}-t\right)dt,$$

dove sarà

$$\frac{1}{2}>t,\ a-t>a-1+t,\ a-t+1>a+t,\ldots$$
$$a-t+m>a+m-1+t:$$

dunque avremo

$$D^n f(\alpha)>D^n\left(\frac{k_n}{1.2\ldots n}\alpha^n\right)=k_n,$$

e quindi

$$\rho_n>\frac{k_n}{z+a+n}.$$

Si ha pure

$$D^n f(\alpha)=k_n+\frac{k_{n+1}}{1}\alpha+\frac{k_{n+2}}{1.2}\alpha^2+\ldots,$$

e sostituendo

$$\rho_n=\frac{k_n}{z+a+n}+\frac{k_{n+1}}{(z+a+n)(z+a+n+1)}$$
$$+\frac{k_{n+2}}{(z+a+n)(z+a+n+1)(z+a+n+2)}+\ldots,$$

il che riproduce i termini della serie compresi nel resto della medesima. Ora essendo

$$\frac{1}{m+1} < \frac{1}{z+a+m+1}\left(1+\frac{z+a}{n+1}\right),$$

quando $m > n$, ne seguirà

$$\rho_n < \frac{1}{z+a+n}\left(1+\frac{z+a}{n+1}\right)\int_0^1 (a-v)(a-v+1)\ldots.$$

$$(a-v+n)\left(\frac{1}{2}-v\right)\left(\frac{1}{z+a+n+1}+\frac{a-v+n+1}{(z+a+n+1)(z+a+n+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{(a-v+n+1)(a-v+n+2)}{(z+a+n+1)(z+a+n+2)(z+a+n+3)}+\ldots\right)dv,$$

ossia per la formola (2)

$$\rho_n < \frac{1}{z+a+n}\left(1+\frac{z+a}{n+1}\right)\int_0^1 (a-v)(a-v+1)\ldots(a-v+n)\left(\frac{1}{2}-v\right)\frac{dv}{z+v}.$$

Se si suppone $a=0$, che è il caso considerato dallo Schlömilch, si avrà

$$k_0 = \frac{1}{12},\quad k_1 = 0,\quad \text{e}\quad k_2,\quad k_3,\ \ldots$$

saranno tutti negativi, come trovò il Binet (*), poichè

$$-(m+1)k_m = \int_0^1 t(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\Big((2-t)(3-t)\ldots$$

$$(m-t)-(1+t)(2+t)\ldots(m-1+t)\Big)dt;$$

quindi cambiando $k_m$ in $-k_m$ per $m > 1$, e $\rho_n$ in $-\rho_n$, avremo

$$\rho_n > \frac{k_n}{z+n},$$

e

$$\rho_n = \frac{k_n}{z+n}+\frac{k_{n+1}}{(z+n)(z+n+1)}+\frac{k_{n+2}}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)}+\ldots$$

onde risulterà

$$\rho_n < \frac{1}{z+n}\int_0^1 v(1-v)\ldots(n-v)\left(\frac{1}{2}-v\right)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{n-v+1}{(n+1)(n+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-v+1)(n-v+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right)dv,$$

(*) Journal de l'École Polyt. 27 cahier, pag. 235.

ossia

$$\rho_n < \frac{1}{z+n}\int_0^1 (1-v)(2-v)\ldots(n-v)\left(\frac{1}{2}-v\right)dv,$$

o ancora

$$\rho_n < \frac{1}{z+n}\left(\frac{1}{2}g_n - (n+1)h_n\right).$$

I limiti superiori che abbiam trovati pei resti delle ultime due serie $\sum \frac{1}{z^2}$ e $\sum \log z$, sono più approssimati di quelli dello Schlömilch.

È noto che le serie esprimenti $\sum \log z$ sono dovute al Binet e furono dimostrate in più modi (*) : la trasformazione di $\sum \frac{1}{z}$ fu data da Lagrange, quella di $\sum \frac{1}{z^2}$ dal signor Sarrus, e il Binet svolse anche $\sum \frac{1}{z^3}$, $\sum \frac{1}{z^4}$, ..., con formole che si traggono dall'equazione simbolica

$$\sum D^n \frac{1}{z} = \sum \left(\log(1+\Delta)\right)^n \frac{1}{z}. \quad (^{**})$$

Se nella formola (1) poniamo

$$f(\alpha) = (1+\alpha)^{m-1},$$

avremo per termine completivo

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1}(1+\alpha)^{m-n-1}\,d\alpha$$

$$< \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

fatta astrazione dal segno, e supposto $n > m-1$, poichè allora

$$(1+\alpha)^{m-n-1} < 1:$$

questo termine avrà dunque per limite zero (num.° 3) quando $m$ sia $> -z$ e $z > 0$; dunque sotto queste condizioni sarà convergente la serie seguente

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{z-1}(1+\alpha)^{m-1}\,d\alpha = \frac{1}{z} + \frac{m-1}{z(z+1)} + \frac{(m-1)(m-2)}{z(z+1)(z+2)} + \ldots$$

(*) Binet, ivi ; Cauchy , Exercices d'Analyse, tom. II, e Comptes rendus del 1854 ; Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique, tom. XX.

(**) Mem. Accad. di Berlino pel 1772; Annales de Math. per Gergonne, tom. X, pag. 226 ; Comptes rendus, tom. XXVII, pag. 201; Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 88.

Nel caso particolare di $z = 1$ il primo membro diventa $\frac{2^m - 1}{m}$, e da ciò risulta esser convergente per $m > -1$ la serie Newtoniana che esprime $2^m$, argomento trattato non ha guari dal signor Catalan nei *Comptes rendus* (*).

5. Il signor Schlömilch è riuscito a trasformare in serie di fattoriali reciproci non solo $\log \Gamma(z)$ ma $\Gamma(z)$. Si ha

$$\Gamma(p) = p^p \int_0^\infty (ze^{-z})^p \, dz\,;$$

donde posto $z = 1 + y$ si trae

$$\Gamma(p) = \frac{p^p}{e^p} \int_0^\infty [\,(1 + y)e^{-y}]^p \, dy\,.$$

Qui si ricorre alla sostituzione

$$(1 + y)e^{-y} = 1 - x^2$$

che è un caso particolare dell'altra

$$(1 + y)e^{-y} = \left(1 - \frac{x^2}{\rho}\right)^\rho$$

in cui è compresa anche la sostituzione di Laplace

$$(1 + y)e^{-y} = e^{-x^2}$$

corrispondente a $\rho = \infty$ : si potrà scrivere

$$y = x\sqrt{\frac{y^2}{1 - (1 + y)e^{-y}}} = xf(y)\,,$$

all'intervallo da $y = -1$ ad $y = \infty$, corrisponderà l'intervallo da $x = -1$ ad $x = +1$, e se ne dedurrà la serie

$$y = \frac{a_1}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

che per un noto teorema di Cauchy sarà convergente finchè il modulo di $x$ non ecceda il più piccolo di quelli per cui l'equazione $y = x\,f(y)$, e la sua derivata $1 = x\,f'(y)$ acquistano una radice comune; si troverà che queste non hanno radici comuni se non sia $e^{-y} = 0$, e quindi $y = \infty$, cosicchè per tutti i valori di $x$ compresi tra $-1$ e $+1$ la serie resterà convergente. Avrem dunque

(*) Comptes rendus, tom. XLV, pag. 621; Cours d'Analyse par M. Sturm, tom. II, pag. 326.

$$\Gamma(p)=\frac{p^p}{e^p}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^p\left(a_1+\frac{a_2}{1}x+\frac{a_3}{1.2}x^2+\ldots\right)dx$$

$$=\frac{2p^p}{e^p}\int_0^1(1-x^2)^p\left(a_1+\frac{a_3}{1.2}x^2+\frac{a_5}{1.2.3.4}x^4+\ldots\right)dz$$

e a motivo di

$$\int_0^1(1-x^2)^p.x^{2m}\,dx=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)}{2\Gamma(p+m+\frac{3}{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)}{2^m(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2})\ldots(p+m+\frac{1}{2})}\cdot\frac{p\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})},$$

fatto $p+\frac{1}{2}=q$, e supposto perciò $q>\frac{1}{2}$, ne conchiuderemo la domandata serie

$$\Gamma(q)=e\sqrt{\pi}\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{e}\right)^{q+\frac{1}{2}}\left\{\frac{a_1}{q}+\frac{a_3}{4q(q+1)}+\frac{a_5}{4\,.\,8q(q+1)(q+2)}+\ldots\right\}.$$

Ponendo

$$\Gamma(q)=e\sqrt{2\pi}\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{e}\right)^{q+\frac{1}{2}}\frac{\omega(q)}{q}$$

avremo la funzione $\omega(q)$ espressa in serie convergente, e questa serie si ridurrà per $q=\infty$ al primo suo termine $\frac{a_1}{\sqrt{2}}=1$, onde $\log\omega(q)$ sarà $=0$ per $q=\infty$. Sarà ad un tempo

$$\log\Gamma(q)=\tfrac{1}{2}\log 2\pi+(q+\tfrac{1}{2})\log(q-\tfrac{1}{2})-q+\tfrac{1}{2}-\log q+\log\omega(q),$$

e confrontando con la (3) se ne trarrà

$$\log\omega(q)=\mu(q)-\tfrac{1}{2}-(q+\tfrac{1}{2})\log\left(1-\frac{1}{2q}\right);$$

cambiando $q$ in $q+1$, e sottraendo avremo pure

$$\log\omega(q)=\log\omega(q+1)+(q+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{q-\frac{1}{2}}\right)+\log\frac{q+\frac{1}{2}}{q+1}-1;$$

ponendo in questa successivamente

$$q=p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ldots$$

e sommando otterremo

$$\log\omega(p)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[(p+m+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{p+m-\frac{1}{2}}\right)+\log\frac{p+m+\frac{1}{2}}{p+m+1}-1\right],$$

formola simile a quella di Gudermann.

Le medesime sostituzioni

$$z = 1 + y\,, \quad (1 + y)e^{-y} = 1 - x^2$$

servono al signor Schloemilch per trasformare l'integrale

$$\mathrm{F}(u) = u\int_0^\infty e^{uze^{-z}} ze^{-z}\,\mathrm{d}z,$$

che esprime la serie

$$\frac{u}{1} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{3}\right)^3 + \ldots\,;$$

fatto $\frac{u}{e} = v$, ne ricava

$$\mathrm{F}(u) = 2ue^v\int_0^1 e^{-vx^2}\,(1 - x^2)\left(a_1 + \frac{a_3}{1.2}x^2 + \frac{a_5}{1.2.3.4}\,x^4 + \ldots\right)\mathrm{d}x\,,$$

i cui diversi termini si riducono facilmente all'integrale Krampiano $\int_t^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, se $v$ è positivo. Nel caso di $u$ negativo, cambiando $u$ in $-u$ si ha

$$\mathrm{F}(-u) = -u\int_0^\infty e^{-uze^{-z}}\,e^{-z}\,\mathrm{d}z\,,$$

e facendo $e^{-z} = 1 - x$ si ottiene

$$\mathrm{F}(-u) = -u\int_0^1 (1 - x)^u(1 - x)^{-ux}\,\mathrm{d}x$$

si svolgerà $(1 - x)^{-ux}$ mediante la formola del binomio, e sostituendo ad ogni integrale

$$\int_0^1 (1 - x)^u\,x^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

il suo valore, si avrà $\mathrm{F}(-u)$ espressa da una serie i termini della quale avranno per denominatori i fattoriali

$$(u + 1)(u + 2)\ldots(u + m).$$

Queste trasformazioni gioveranno quando il valor numerico di $u$ sia molto grande.

A. Genocchi.



# PUBBLICAZIONI RECENTI

MONTFERRIER — Enciclopedia Mathematica vol. 3 in 8.° *Paris.*

LANDRY — Septième Mémoire sur la théorie des nombres.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics N.° 11. *London.*

Atti dell' Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Anno XIII. Sessione I. del 4. Decembre 1859. Sessione II. del 8. Gennajo 1860. 2. fascicoli in 4.° *Roma.* Tipografia delle Belle Arti.

CRÉLLE — Journal des Mathematik. *Berlin.* vol. 57. N.° 3. (In questo N.° si trova fra le altre un'importante Memoria del Sig. *Kummer*, scritta in lingua Tedesca, e che porta il titolo di *Teoria generale dei sistemi di raggi rettilinei*).

LIOUVILLE — Journal de Mathématiques. *Paris. Decembre* 1859. In questo fascicolo si trova 1.° un'interressante Memoria di *Dirichlet* sulla legge di reciprocanza nella teorica dei residui quadratici; 2.° Sulla percussione dei corpi di *Poinsot* Capitolo terzo : 3.° I discorsi dei Sigg. Bertrand e Mathieu pronunciati nei funerali dell'illustre geometra francese.

TERQUEM — Nouvelles Annales des Mathématiques. Janvier et Février 1860.

Annales de l'Observatoire de Paris vol. V. in 4°, 1859.

CARNOT — Refléxions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal 4.e Edit. *Paris* 1860.

## ERRATA—CORRIGE

*Tomo I.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Pag. 40 | lin. 8, 9, 11 : in luogo di $\Psi$ *si legga* $\psi$. | | | |
| » 61 | formola (10) | $3(C^4 - 16BDC^2 + \ldots$ | *si legga* | $(3C^4 - 16BDC^2 + \ldots$ |
| » 312 | lin. 2 | $-6pq$ | *si legga* | $-6pqr$ |
| » 384 | lin. 1 Si tolga la parola *assai*. | | | |
| » 385 | lin. 18 | differenziazione | *leggi* | differenziazioni |
| » ivi | lin. 21 *si legga* | $\int_0^\infty \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + 2\cos\theta + e^{-t}} - 1\right) dt \operatorname{sen} ht = \pi . \frac{e^{h\theta} + e^{-h\theta}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} - \frac{1}{h}.$ | | |
| » 386 | lin. 20 | è accennata | *leggi* | e dopo aver accennata. |
| » 388 | lin. 6 | proferisce | —— | proferiva |
| » ivi | lin. 21 | venute | —— | vennero |
| » 389 | lin. 23 | nel primo | —— | nel primo membro |
| » 390 | lin. 23 | solo fluido | —— | velo fluido |
| » ivi | lin. 31 | a quella | —— | a quelle |
| » 391 | lin. 2 | non rappresenta | —— | non rappresenti |
| » 392 | lin. 7 | dipendere | —— | discendere |
| » 395 | lin. 20 | $\frac{F'(s)}{s}$ | —— | $\frac{F'(s)}{2s}$ |

# INDICE GENERALE

## DI TUTTI GLI ARTICOLI.

## RIVISTA BIBLIOGRAFICA





IMPRIMATUR
Fr. Th. M. Larco Ord. Praed. S. P. A. Mag. Soc.
IMPRIMATUR
Fr. A. Ligi-Bussi Min. Conv. Archiep. Icon. Vicesg.

Leipzig Januar 1858. **PROSPECTUS.** Joh. Ambr. Bart. Verlagsbuchhandlung.

# Biographisch-literarisches
# HANDWÖRTERBUCH
## zur Geschichte der exacten Wissenschaften

enthaltend
Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen
von
**Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen usw.**
aller Völker und Zeiten
gesammelt von

## J. C. POGGENDORFF

Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

gr. Lexiconformat. Ein Band in vier Lieferungen. geh.

Preis des vollständigen Werkes ungefähr 9 Thlr. Pr. Crt.

Wer unter den Pflegern der exacten Wissenschaften jemals Neigung oder Bedürfnisse empfunden, sich über die Lebensverhältnisse der Männer zu unterrichten, deren Leistungen Gegenstand seines Studiums sind, der wird in den meisten Fällen sowohl in den betreffenden Geschichtswerken, als überhaupt in den einschlagenden Hand-, Lehr- und Wörterbüchern sich vergeblich nach einer nur einigermassen genügenden Auskunft umgesehen haben. Selbst bändereiche Werke, wie die ausführlicheren biographischen Encyclopädien, behandeln, durch ihren allgemeineren Standpunkt an einer Bevorzugung der exacten Wissenschaften gehindert, zumeist auch nur die Koryphäen oder sonst irgendwie berühmt gewordene Männer dieses Gebiets, ohne der übergrossen Anzahl derer zu gedenken, welche geräuschlos an der Fortbildung der Wissenschaft arbeiteten und sie mit werthvollen Einzelnheiten bereicherten. Um Nachweisungen über diese zu erhalten, muss man schon weiter eindringen in das umfangreiche Gebiet der literargeschichtlichen Quellen, und das ist, bei dem Mangel aller Anleitung hierzu, ein ebenso mühevolles und zeitraubendes, als häufig fruchtloses Geschäft.

Man wird daher ein Werk willkommen heissen, welches sich zum Führer auf diesen vielfach verschlungenen und verborgenen Pfaden biographisch-literarischer Forschung anbietet. Vor einigen Jahren schon hat das Publikum einen Vorläufer davon in des Verfassers « Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften seit Wiederherstellung derselben » (Berlin, 1853) empfangen, einer graphischen Darstellung, welche, abgesehen von ihrer ganz verschiedenen Grundidee, sich nur auf eine Auswahl der hervorleuchtendsten Namen aus den letzten drei bis vier Jahrhunderten erstreckte, während für das « Handwörterbuch » der Grundsatz leitend gewesen ist, alle den bezeichneten Wissenschaftsgebieten angehörigen Personen darin aufzunehmen, so weit über deren Lebensverhältnisse eben irgend bestimmtere Aufschlüsse zu beschaffen waren: eine Bedingung, die dem Werke seinen Charakter

*Il est naturel que tous ceux qui s'adonnent à l'étude des sciences exactes, aient maintes fois éprouvé le besoin de s'instruire des circonstances particulières de la vie de ceux dont les travaux font l'objet de leurs études. Mais dans la plupart des cas, ils se trouvent arrêtés dans leurs recherches par les lacunes que renferment les ouvrages historiques et autres qu'ils peuvent consulter. Il est reconnu que même les ouvrages les plus volumineux, tels que les encyclopédies biographiques, ne renferment ordinairement des notices que sur la vie de ceux, qui se sont fait un nom par leurs découvertes ou de laborieux travaux dans les sciences, ou sur celle de ceux qui se sont illustrés sous d'autres rapports. Mais on cherchera en vain des renseignements sur ces hommes modestes, travaillant dans une sphère plus humble, qui ont cultivé les sciences exactes et les ont enrichies du fruit de leurs veilles. Il faut donc, pour connaître les particularités relatives à ces personnes, remonter très-loin aux sources littéraires et historiques, travail pénible et difficile, faute de guide, attendu la longueur des recherches qui sont, même parfois, infructueuses.*

*On accueillera donc avec plaisir un ouvrage destiné particulièrement à faciliter et abréger le travail pour obtenir les notices biographiques et scientifiques sur les hommes qui se sont consacrés aux sciences exactes. L'auteur a publié, il y a quelques années, comme précurseur du présent ouvrage, un tableau chronologique sous le titre: « Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften seit Wiederherstellung derselben » (Berlin, 1853), description graphique qui diffère quant à l'idée primitive et fondamentale, et se borne à un choix des hommes les plus éminents des trois ou quatre derniers siècles; tandis que dans l'ouvrage que nous offrons aujourd'hui, intitulé: « Handwörterbuch, » on a admis le principe de mentionner sans distinction tous ceux qui se sont occupés des sciences en question et sur lequels on est parvenu à obtenir des notices biographiques exactes: condition, qui donnera à l'ouvrage un*

Any among the multitude of those cultivating the mathematical and inductive sciences, who have felt the want or inclination to inquire into some circumstances of the lives of the men whose works form the subject of their study, will in most cases have sought in vain for satisfactory information, as well in historical works as in books of reference generally. Voluminous works even, such as the more complete Biographical Encyclopaedias, unable from their general point of view, to give a preference to the abovementioned sciences, treat for the most part of eminent men or of those in some way distinguished, overlooking the many whose noiseless industry, by furnishing valuable details, has contributed so materially to the advancement of science. For intelligence concerning these latter we must endeavour to penetrate deeper into the wide field of literary authority, but, seeking as it were in the dark, always at a great expense of time and very frequently in vain.

A work serving as guide in this often intricate and hidden path of biographical-literary investigation will meet with a warm welcome. Some years ago a precursor of the same was presented to the public in the author's «Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften seit Wiederherstellung derselben» (Berlin, 1853), a graphic representation which, irrespective of its totally different conception, comprised only a selection of the most illustrious names of the last three or four centuries, while the leading principle for this dictionary has been to include all persons connected with the mathematical and inductive sciences, as far as any certain notices of their lives could be gained: a condition securing to the work its biographical-literary character, without permitting it to degenerate into a mere

als biographisch-literarische Fundgrube sichert, ohne es zu einem blossen Namen-und Bücherverzeichnisse ausarten zu lassen. Eigentliche Lebensbeschreibungen und vollständige Literaturberichte zu geben, beabsichtigte der Verfasser nicht, um den Umfang des Unternehmens nicht über die Kräfte eines Einzelnen und zur offenbaren Verkümmerung allgemeinerer Verbreitung und Nützlichkeit ins Gewaltige anzuschwellen; er gestaltete vielmehr aus kurzgefassten Abrissen ein Uebersichtswerk, wie es bis jetzt noch nicht vorhanden, ein Nachschlagebuch, das in der Hand jeden Freundes der exacten Wissenschaften sein könnte, um ihm eine erste Auskunft über die hauptsächlichsten Data des Lebens und Wirkense der in diesem Gebiete thätigen Personen zu gewähren, versehen zugleich mit Hinweisungen auf die Quellen, wo etwa ausführlichere Nachrichten anzutreffen sind.

Mit diesem Plane seit etwa zehn Jahren unablässig beschäftigt, hat der Verfasser, vorzugsweise unterstützt durch die grossen literargeschichtlichen Schätze der Berliner königl. Bibliothek, sowie durch zahlreiche Originalmittheilungen über Zeitgenossen, welche befreundete Männer ihm vermittelten, ein so reichhaltiges Material zusammengebracht, dass sein Werk in Rücksicht auf Vollständigkeit wohl hinter keinem ähnlichen über andere Gebiete menschlicher Thätigkeit zurückstehen möchte. Da es ausserdem im Stande ist, dem Leser eine ganze Bibliothek biographischer Hülfsmittel zu vertreten, so wird es hoffentlich dazu beitragen, den Sinn für derartige geschichtliche Studien auf dem Felde der exacten Wissenschaften in weiteren Kreisen anzuregen und fruchtbar zu machen*.

Das Werk wird in einem Bande von etwa 130—150 Bogen zu 8 Seiten in dem Format und der Satzeinrichtung umstehender Probeseite vollständig sein und sol in vier, ungefähr gleichen Lieferungen in Zeiträumen von je 6—8 Monaten ausgegeben werden, von denen die erste (die, bis zum Artikel «Dirichlet» reichend, auf 36 Druckbogen 2019 Namen, ausschliesslich aller Verweisungen, umfasst), fertig vorliegt und zum Ladenpreise von 2 Thlr. 20 Ngr. Pr. Crt. durch alle Buchhandlungen Deutschlands und des Auslandes bezogen werden kann.

* Neben den Ergänzungen, Welche dem Buche aus dem Vorschreiten der Zeit während des Drucks erwachsen, könnten ihm allerdings auch noch andere schätzbare Bereicherungen durch eine recht vielseitige unmittelbare Beihülfe des Publikums zufliessen. An alle Mathematiker und im Gebiete der Astronomie, Physik, Chemie Mineralogie, Geologie u. dgl. thätigen Naturforscher, welche bisher keine besondere Aufforderung dazu erhielten, ergeht deshalb die Bitte, dem Verfasser baldthunlichst einige authentische Nachrichten über ihre Person zukommen zu lassen. Herausgeber mathematischer und naturwissenschaftlicher Zeitschriften, gleichwie Vorstände gelenrter Gesellschaften und Akademien sind ganz besonders ersucht, in ihren Kreisen uuf weiteste Verbreitung und Befolgung dieser Aufforderung hinzuwirken. Auch jede genauere Nachricht über Personen aus früherer Zeit, jede Nehawisung noch unbenutzter Quellen (deren sich in provincialen und localen Literaturen wohl verschiedene versteckt finden dürften) ist erwünscht. Das dadurch gewonnene Material wird, soweit möglich, im fortlaufender Texte selbst, sonst in den am Schlusse anzuhängenden Nachträgen benutzt werden.

Ein Schema für solche Mittheilungen ist auf pem Umschlage der ersten Lieferung des «Handwörterbuchs» abgedrückt, und wird auch, zur Ausfüllung separat gedruckt, vom Verleger in jeder benöthigten Anzahl gratis geliefert, Bestellungen darauf durch die Post oder durch die Buchhandlungen. Alle Zuschriften sind entweder an den Verfasser, Prof. Poggendorff, 62. Charlottenstrasse in Berlin, oder an die Buchhandlung J. A. Barth in Leipzig portofrei einzusenden.

*cachet d'authenticité biographique, sans toutefois le laisser dégénérer en simple catalogue de noms et de publications. Pour ne pas pousser à l'infini l'étendue d'un semblable travail, auquel un seul homme ne saurait suffire, l'auteur n'a pas eu l'intention de donner des biographies proprement dites ou des rapports complets sur les travaux scientifiques: ce qu'il a voulu donner aux amis des sciences, c'est un ouvrage de peu d'étendue tel q'il n'en existe pas encore, et qui devra être dans la possession de tout savant pour pouvoir y puiser des renseignement positifs sur la vie et les travaux des hommes, qui se sont voués comme lui, aux mêmes études. Ce livre indiquera en outre les sources dans lesquelles se trouvent des informations plus amples.*

*Occupé constamment depuis près de dix ans à recueillir tout ce qu'il a pu trouver de relatif au but qu'il se proposait, il lui a été d'un grand avantage de pouvoir puiser avec abondance dans les trésors littéraires et historiques de la bibliothèque royale de Berlin et d'être secondé par des amis qui se sont empressés de lui faire parvenir des notices inédites sur un assez grand nombre de contemporains. Ainsi l'auteur a réussi à rassembler des matériaux assez suffisants pour que son ouvrage ne soit inférieur à aucun autre du même genre. Notre publication étant en état de représenter une collection volumineuse de sources biographiques, nous espérons qu'elle contribuera à répandre le goût des études historiques dans le cercle des sciences exactes*.*

*L'ouvrage ne consistera qu'en un seul volume d'environ 130 à 150 feuilles d'impression, format du présent prospectus, la feuille de 8 pages, et texte conforme au specimen ci-joint; il sera divisé en 4 livraisons à peu près égales: dont la première allant jusqu'à l'article «Dirichlet» et contenant sur 36 feuilles 2019 noms, les renvois non compris, vient de paraître. Le Prix de cette 1re livraison est de 2 th. 20 ngr. (10 frs.) et est en vente chez tous les libraires de l'Allemagne et de l'Étranger.*

* *En plus des changements qui devront nécessairement se produire pendant le temps de l'impression, notre ouvrage pourrait être encore enrichi, si le monde savant voulait nous prêter son concours. Nous adressons donc à tous les mathématiciens, physiciens, astronomes, chimistes, minéralogistes, géologues etc., qui jusqu'à présent n'ont pas reçu d'invitation spéciale, la prière de nous transmettre au plus tôt des notices authentiques sur leurs personnes. Les éditeurs de journaux de mathématiques ou de toute autre science exacte, ainsi que les présidents des sociétés et des académies scientifiques coopéreraient à la perfection de notre ouvrage en répendant ardemment cette invitation, a fin de lui donner toute la publicité possible. En outre, nous recevrons avec reconnaissance des notices sur des personnes décédées, ainsi que des renseignements sur les sources ou ces notices pourraient être puisées. On se fera un devoir d'utiliser ces matériaux, en les faisant entrer ou dans le texte même ou dans un supplément.*

*Ou trouvera sur l'enveloppe de la première livraison de notre ouvrage une formule pour de telles communications imprimée aussi séparément pour être remplie; l'éditeur en offre des exemplaires à ceux qui en désireraient, et qu'on peut se procurer par l'entremise de la poste ou des libraires. On est prié d'adresser franco toutes les lettres, ou directement à l'auteur Mr. Poggendorff, professeur à l'université de Berlin (Charlottenstrasse N. 62), ou à Mr. J.-A. Barth, libraire-éditeur à Leipzig.*

list of names and books. Moreover, it was not the intention of the author to give strict biographies and complete literary indices; such would have inconveniently increased the bulk of the work beyond the power of a single compiler and disadvantageously restricted its circulation and usefulness; he purposed rather to present, ib shorth sketches, a summary, such as has not yet appeared, — a manual, which may be in the possession of every friend of the inductive sciences, satisfying him on the chief points of date, life and works of persons active in this field, and providing him at the same time with references to the sources whence more detailed information may be obtained.

For the last ten years the author has been continually employed in the compilation of this work, in which task he has been particularly aided by the extensive literary-historical treasures of the royale library of Berlin as well as by the services of several friends who have kindly supplied him with numerous authenthic communications from scientific men of the present day. Taking into view the copious material thus collected, it may be confidently asserted that this work will be inferior to no similar one on any other branc of science; and representing, as it does, a whole library of biographical resources, it will doubtlessly animate to historical study in this sphere and tend to render the same fruitful*.

The work will be complete in one volume, containing from 130 to 150 sheets of 8 pages each; the size and typographical arrangement as in the accompanying specimen page. It will appear in four parts of about equal volume at periods of from 6 to 8 months; the first part (extending to the article «Dirichlet» and comprising in 36 printed sheets 2019 names, exclusive of all references) is now published at 2 2/3 Thlr. (8s. or 2. 2. 38) and may be obtained of any foreign bookseller.

* Besides a few supplementary notices, rendered necessary by deficiencies naturally arising from the lapse of time consumed in the printing, many valuable additions migt without doubt be made by the public lending their direct assistance; the author therefore begs all mathematicians, and all those actively engaged in the inductive sciences, as Astronomy, Physics, Chemistry, Mineralogy, Geology, etc., who have not hitherto received a special invitation to that effect, to forward to him without delay a short account of their own lives and principal contributions to sciences. Editors of periodicals devoted to mathematics and natural philosophy, as also heads of learned societies and accademies are specially requested to procure the widest possible circulation and attention to this appeal. Any particulars concerning persons of past times, or references to sources hitherto neglected (of which some may exist in provincial and local literature) will likewise be thankfully received. The material thus gained will, as far as is practicable, be worked up in the text itself, otherwise it will be contained in the supplement.

A form for such communications will be found on the wrapper of the first part of this work and any required number of such forms printed separately may be procured gratis of the publisher direct or through any foreign bookseller. All writings to be sent free of charges, either to the author, Professor Poggendorff, 62, Charlottenstrasse, Berlin, or to the publisher, J. A. Barth, Leipzig.

## Probeseite. Specimen.



**Descotils**, s. Collet-Descotils.

**Descroizilles**, François. — Apotheker in Dieppe; Vater d. Folgenden *(LBN)*,
geb. 1707, Sept. 20, Dieppe,
gest. 1788, März 11, Dieppe.
Découverte d'un remède purgatif, fondant et calmant, ou Traité sur un nouveau sel neutre, Rouen 1760. Nouv. observation sur le sel purgatif etc. 1762).

**Descroizilles**, François Antoine Henri. — Prof. d. Chemie zu Rouen und Director einer Berthollet'schen Bleicherei zu Lescure, bei Rouen; später Mitgl. und Secretär des Conseil-général des Manufactures in Paris *(LBN) (BS) (Q)*,
geb. 1751, Juni 11, Dieppe,*
gest. 1825, Apr. 14, Paris.
Description et usage du Berthollimètre etc. Paris 1802. Notice sur l'alcalimètre et autres tubes chimico-métriques ou sur le polymètre chimique etc. Ib. 1810, 1818, 1824 (5me édit. 1839). Méthode très-simple pour préserver les blés etc. Ib. 1819. Notice sur la fermentation vineuse etc. Ib. 1822. — Sur la quantité d'eau nécessaire à l'extinction des incendies etc. (Ann. chim. LI, 1804). Notices pyronomiques etc. (Ib. LIV, 1805). Sur les eaux distillées des plantes inodores; sur la distillation de l'eau destinée à des expériences chimiques et sur les alambics (Ib. LVII, 1806). Sur l'aréométrie et spécialement sur un nouvel instrument nommé aréométritype etc. (Ib. LVIII, 1806). Sur le blanchiment par la lessive berthollienne (Ib. id.). Sur les alcalis du commerce (Ib. LX, 1806 et LXXII, 1809). Sur la saumure de violettes, considérée comme réactif etc. (Ib. LXVII, 1808). Sur les fumigations guytoniennes et sur les frictions berthollienes (Ib. LXXIX, 1811). Sur le gaz nitreux que l'on a annoncé se dégager dans la cuite du sucre de betteraves (Ann. chim. phys. XXV, 1824). **D.** zeigte zuerst, dass der Alaun ein Doppelsalz ist; fing auch zuerst das Chlor, zum Behuf des Bleichens, in Kalkmilch auf.
* geb. 1745 etwa, . . . *(Q)*.

**Desfontaines**, Réné Louiche. — Prof. d. Botanik am Jardin des Plantes zu Paris u. Mitgl. d. Acad. d. Wiss. daselbst *(B) (BBL)*,
geb. 1750, Febr. 14, Tremblay, Dép. Ile-et-Vilaine,*
gest. 1833, Nov. 16, Paris.
Manuel de cristallographie ou Abrégé de la cristallographie de **Romé de l'Isle**, Paris 1792.—Viel Botanisches.
* geb. 1732, Febr. 14 *(Q)*; 1751, . . . *(QC)*.

**Deslandes**, Henri François Boureau.- Generalcommissair der französ. Marine zu Rochefort und Brest; zuletzt in paris privatisirend *(Q)*,
geb. 1690, . . . . . . Pondichéry,
gest. 1757, Apr. 11, Paris.
Recueil de différens traités de physique et d'histoire naturelle propres à perfectionner ces deux sciences, 3 vol. 12°, Paris 1748, 1750 — 53.

**Deslandes**, Pierre Delaunay.— Director der königl. Spiegelmanufactur zu St. - Gobain seit 1758, früher Priester vom Orden des Oratoriums und Lehrer d. Rhetorik und Mathematik in dessen Collegium zu Soissons *(LBN)*,
geb. 1722, Mai 21, Vergoncey, Dép. Manche,
gest 1803, Dec. 10, Chauny.*
Machte wichtihe Verbesserungen in der Fabrication des Spiegelglases.
* geb. 1723, . . . Avranches, gest. 1803, . . . Chauny *(DC.V)*.

**Deslanges** (Delanges), Paolo.— Capitän im Ingenieurcorps der Republik Venedig, dann Prof. d. Mathematik an der Militärschule zu Verona, später Director d. hydraulischen Commission, zuletzt Privatmann. Mitglied d. Società Italiana und des Istituto nazionale Italiano *(LL)*,
geb. Mitte d. XVIII. Jahrh., Orzinovi, b. Brescia,
gest. 1810, . . . . . . . . . . . Orzinovi.
Sopra il movimento concreto de'solidi (Mem. Soc. Ital. III, 1786). Statica e meccanica de'semifluidi (Ib. IV, 1788). Teoria generale del moto rotatorio spontaneo de' corpi naturali sopra piani inclinati (Ib. V, 1790). Sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi etc. (Ib. V, 1790 et VIII, 1799). Principj di statica per i tetti, per i ponti e per le volte (Ib. X, 1803). Mem. intorno all'incurvazione de'solidi (Ib. XII, 1805). Schiarimenti intorno a'principi d'anteporsi nell'applicazione de'communemente noti alla soluzione de'problemi meccanici (Ib. id.). Osservazioni sulle resistenze dell'acqua e dell'aria (Ib. XIII, pt. I, 1807). Esperienze sul dispendio d'acqua de'tubi e de'canali rettilinei e tortuosi (Ib. id.). Saggio intorno alla teoria del moto concreto de'corpi (Ib. XIV, pt. I, 1809). Analisi e esoluzioe sperimentale del problema delle pressioni (Ib. XV, pt. I. 1811).

**Desmarest** (Desmarets), Nicolas.—Mitgl. d. Acad. d. Wiss. u. d. späteren Instituts zu Paris; vor der Revolution einer der Administratoren d. königl. Porzellanfabrik zu Sèvres, dann General-Inspector derselben, auch Director d. Manufacturen von Frankreich etc. *(BC)(BS)(Q)*,
geb. 1725, Sept. 16, Soulaines, Dép. de l'Aube,
gest. 1815, Sept. 28, Paris.
Dissertation sur l'ancienne jonction de l'Angleterre à la France, Amiens 1753. Conjectures physico-

*On est prié de donner, dans l'intérêt de l'ouvrage, la plus grande publicité possible à ces formules dont toutes les librairies allemandes délivrent d'après demande gratis des exemplaires en allemand, français ou anglais.*

---

# FORMULE POUR LES NOTICES INÉDITES

DESTINÉES

A ÊTRE INSÉRÉES DANS L' OUVRAGE DE M. **POGGENDORFF**

INTITULÉ :

## Biographisch-literarisches Handwörterbuch

**zur Geschichte der exacten Wissenschaften usw.**

[*Manuel biographique et littéraire pour servir à l'histoire des sciences exactes etc.*]

chez **J.-A. Barth.** libraire-éditeur à Leipzig.

La 1re et la 2de livraison contenant les Aasheim-Huddart ont déjà paru.

---

1) **Nom** et **prénoms** écrits en entier et bien lisiblement:

2) **Emploi, profession** ou **qualité** tant actuelle qu'antérieure et **demeure,** ayant égard aux dates chronologiques:

3) **Année, jour** et **lieu** de **naissance:**

4) **Désignation des sources** ou écrits quelconques où se trouvent déjà imprimées des notices biographiques sur la personne en question:

5) **Indication des travaux principaux,** plus particulièrement des ouvrages publiès avec indication du format, de l'année et du lieu de publication. Quant aux articles insérés dans les journaux scientifiques, il suffira d'indiquer le titre et l'année de la feuille où ils se trouvent contenus.— Bien qu'on désire ces renseignements aussi complets que possible, ils ne sont cependant pas de rigueur.

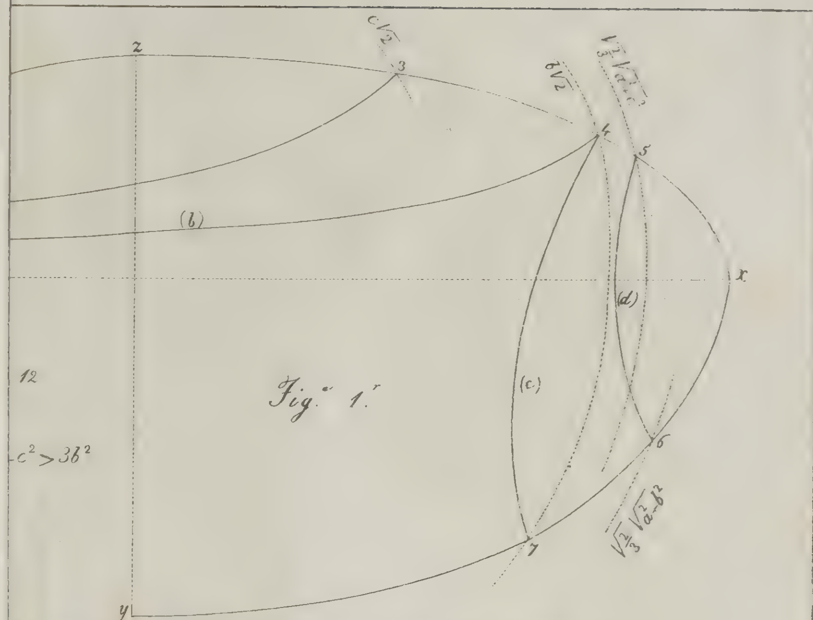
---

*Due Fascicoli dell' opera annunziata nel Prospetto riportato di sopra sono stati finora pubblicati. Il primo di tali Fascicoli è intitolato sulla coperta:* Erste Lieferung. Bogen 1-36. Leipzig, 1858. Verlag von Joh. Ambr. Barth, *e contiene 576 colonne, numerate tutte, salvo le prime due, 3-576. Il secondo dei suddetti Fascicoli, intitolato:* Zweite Lieferung. Bogen 37-72. Leipzig, 1859. Verlag von Joh. Ambr. Barth, *contiene 575 colonne, numerate 577-1152. Nei suddetti Fascicoli trovansi gli articoli:* **Aasheim,** Arnold Nicolaus — **Huddart,** Joseph.

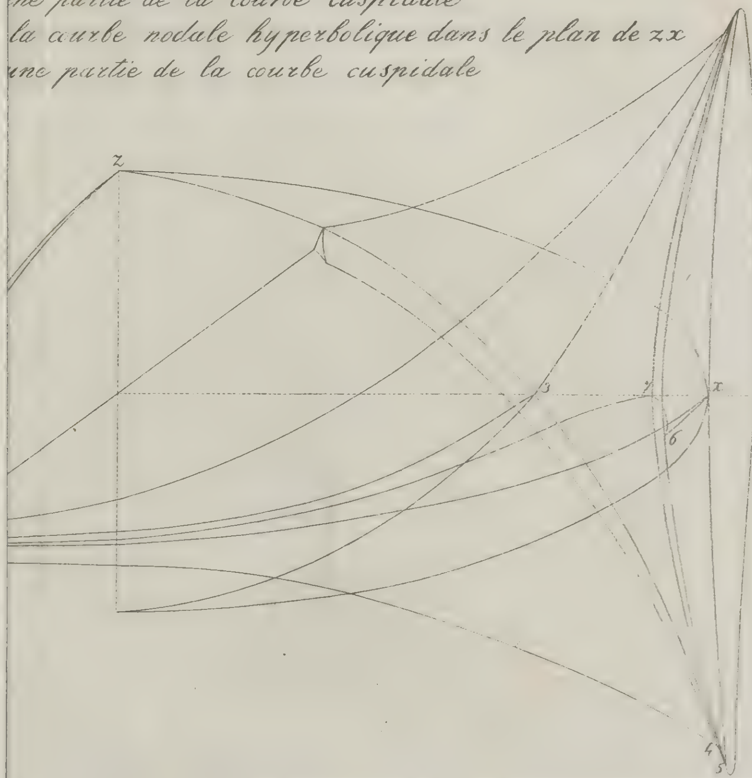
*Ci crediamo in dovere di pregare tutti quei che coltivano le scienze matematiche e fisiche a voler inviare al sig. J. G. Poggendorff (62. Charlottenstrasse, Berlin), ovvero al sig. J. A. Barth (libraire-éditeur à Leipzig), le notizie domandate nella* Formule *riportata di sopra.*

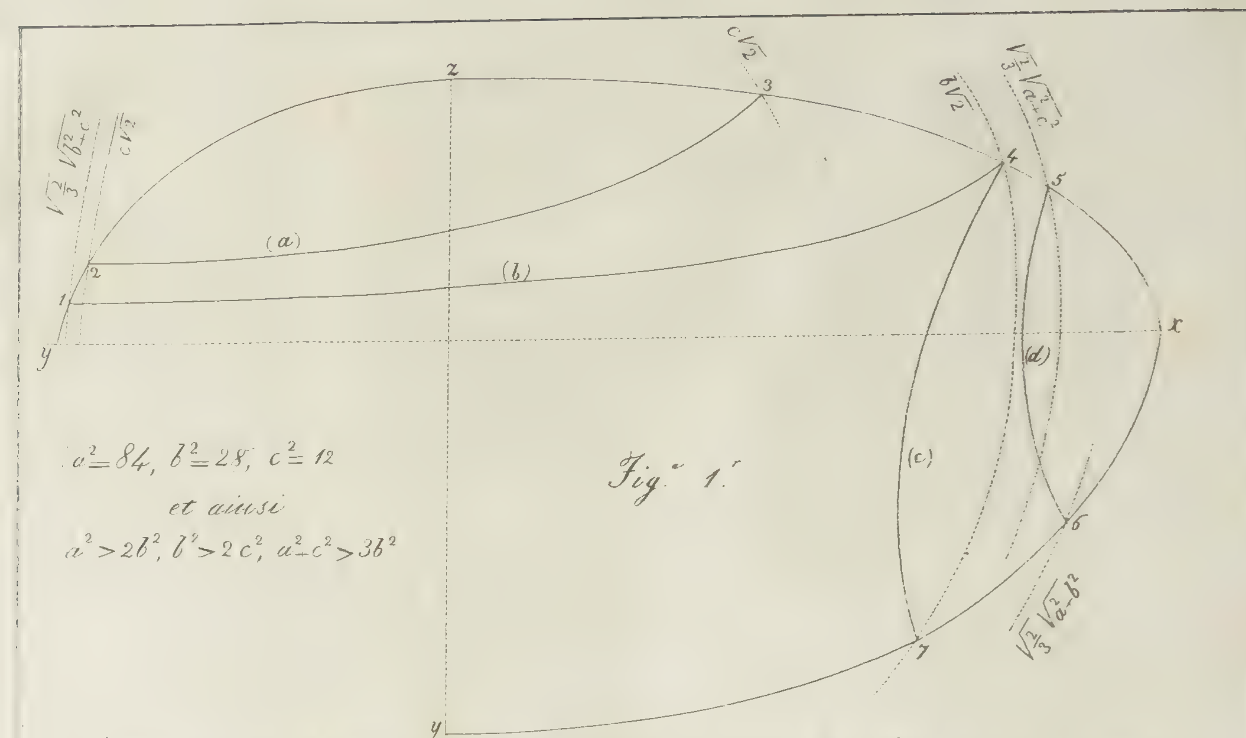
Roma 15 Febbraro 1859.

BARNABA TORTOLINI




la courbe nodale elliptique dans le plan de xy
ne partie de la courbe cuspidale
la courbe nodale hyperbolique dans le plan de zx
ne partie de la courbe cuspidale






(a) Génératrice de la courbe nodale elliptique dans le plan de xy

(b) Génératrice d'une partie de la courbe cuspidale

(c) Génératrice de la courbe nodale hyperbolique dans le plan de zx

(d) Génératrice d'une partie de la courbe cuspidale

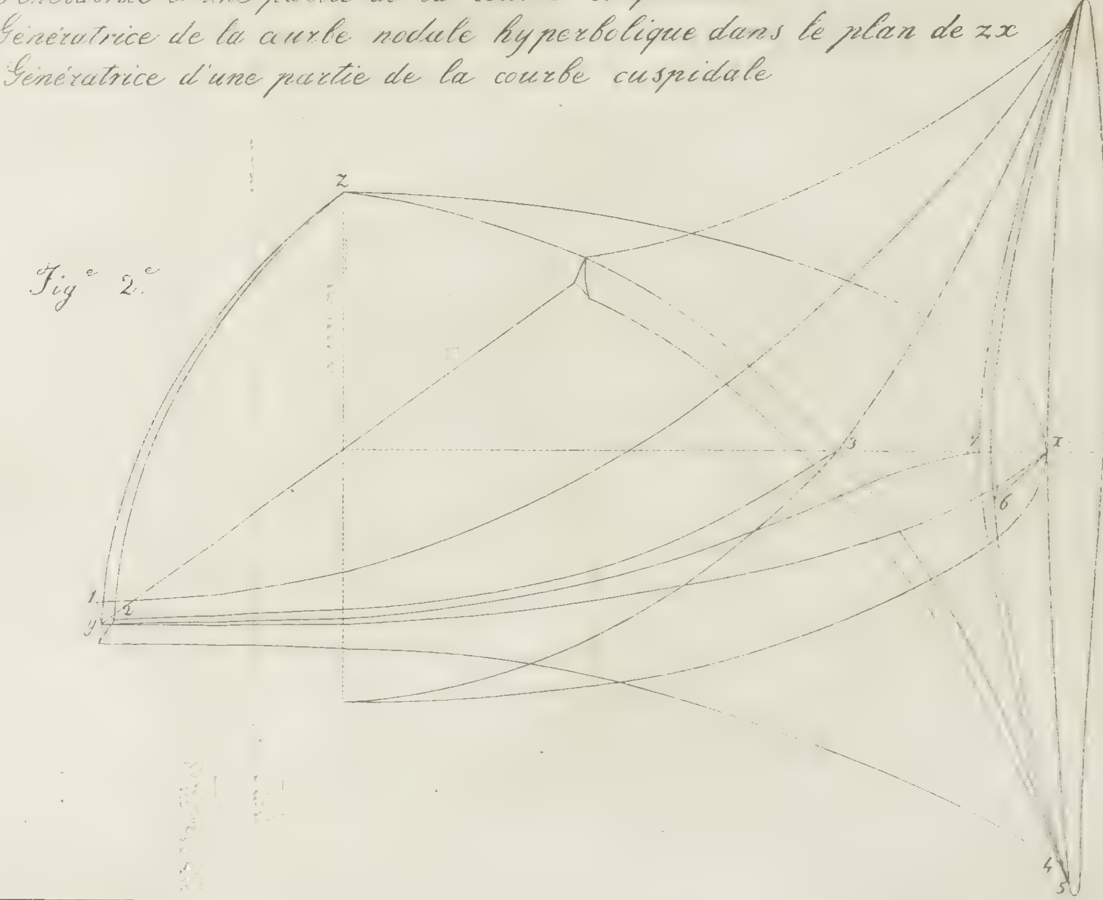
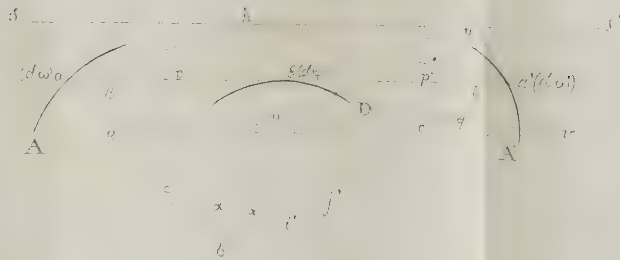


Fig. I.)

s'

v

A'




(Fig. I.)

